UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Licence 3ème année
Année 2007/2008

Espaces vectoriels normés : examen

mardi 15 avril 2008 - durée 2 heures - calculatrice interdite - résumé autorisé

Exercice I.

On munit l'espace c_0 des suites réelles convergentes vers zéro de la norme $\|(u_j)\|_0 := \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j}|u_j|$. Montrer que $\|\cdot\|_0$ est une norme et que $(c_0, \|\cdot\|_0)$ n'est pas un espace de Banach. On pourra étudier la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ avec $x_n := (\underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{\text{premières } n \text{ places}} 0, 0, \ldots)$.

Exercice II.

Soient M et N deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tels que $M \cap N = \{0\}$. Définissons $|||\cdot|||$ sur $M \oplus N = \{m + n : m \in M, n \in N\}$ par $|||m + n||| := \|m\| + \|n\|$.

1. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme et que $(M \oplus N, |||\cdot|||)$ est un espace complet.
2. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme équivalente à la norme initiale $\|\cdot\|$ sur $M \oplus N$ si et seulement si il existe $k > 0$ telle que $\|m\| \leqslant k\|m+n\|$ pour tout $m \in M$ et tout $n \in N$. Peut-on prendre la constante k égale à la norme d'un opérateur (que l'on décrira) ?

Exercice III.

Soit E un espace de Hilbert et soit $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset E$ une suite de sous-espaces fermés de E. Considérons $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite bornée de E telle que x_n est la projection orthogonale de x_{n+1} sur M_n pour chaque n. Montrer les propriétés suivantes :

a) $\|x_n\| \leqslant \|x_{n+1}\|$ pour chaque n ;

b) x_n est la projection orthogonale de x_{n+k} sur M_n lorsque $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$;

c) $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy ;

d) si $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors x_n est la projection de x_∞ sur M_n pour chaque n.

Exercice IV.

Soient $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{v_n\}_{n\geqslant 1}$ deux systèmes orthonormés complets dans un espace de Hilbert $(E, (\cdot,\cdot))$. Soit $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite bornée de nombres complexes et on note $M := \sup_{n\geqslant 1} |\lambda_n|$. Définissons, pour $x \in E$, $T(x) := \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n (x, u_n) v_n$.

1. Montrer que T donné par la formule précédente est un opérateur bien défini, linéaire et continu. Trouver la norme de T.
2. Calculer l'adjoint $T^\star$ de T et montrer que $T^\star T = T^\star T = I$ si et seulement si $|\lambda_n| = 1$ pour tout n. Dans ce cas, quel type d'opérateur est T ?

Exercice V.

Soient ℓ_2 l'espace des suites réelles de carrés sommables, muni de la norme $\|(u_j)\|_2 = \left(\sum_{j\geqslant 1} |u_j|^2\right)^{1/2}$, et c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la norme $\|(v_j)\|_\infty = \sup_{j\geqslant 1} |v_j|$. Pour $(u_j)_{j\geqslant 1} \in \ell_2$ on pose $T(u_1, u_2, u_3, \ldots) := (u_1, u_1 + \frac{u_2}{2}, u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3}, \ldots)$.

Tournez la page S.V.P.

1. Montrer que $T : \ell_2 \to c$, que T est un opérateur linéaire borné et trouver sa norme. On pourra utiliser l'égalité $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots = \pi^2/6$.
2. Montrer que T est inversible et calculer T^{-1}.
3. Montrer que l'image de T est dense dans c, mais que ce n'est pas un fermé de c. On pourra utiliser l'élément $(1 + 1/2\sqrt{2} + \ldots 1/j\sqrt{j})_{j \geqslant 1}$.

Exercice VI.

Soit l'espace $E = \mathrm{C}([-1,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\|_\infty := \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)|$, pour $x \in E$. Définissions f et f_n par les formules $f(x) := x(0)$ et $f_n(x) := \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} x(t)dt$ $(n \geqslant 1)$, pour $x \in E$.

1. Montrer que $f \in E^\star$ et que $f_n \in E^\star$ avec $\|f_n\| = 1$, pour tout $n \geqslant 1$. Que vaut $\|f\|$?
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in E$. De quel type de convergence s'agit-il ?
3. Montrer que la suite $\{\|f_n - f\|\}_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers zéro, lorsque $n \to \infty$. On pourra utiliser la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ donnée par $x_n(t) = \min\{n|t|, 1\}$, pour $t \in [-1,1]$.