Processus stochastiques continus : examen

mercredi 17 décembre 2008 - durée 3 heures - documents de cours autorisés

Dans tous les exercices on se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ satisfaisant les "conditions habituelles".

Exercice I.

Soit $\mathbf{B} = (B^1, B^2)$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien bi-dimensionnel issu de $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|e^{i\alpha} \neq (0,0)$. Considérons $S(t) := \frac{1}{2}\{\int_0^t B_s^1 dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 dB_s^1\}$ et $r(t) := \sqrt{(B_t^1)^2 + (B_t^2)^2}$, $t \geqslant 0$. On pourra suivre les pas suivants pour montrer qu'il existe β et γ deux mouvements browniens réels issus de zéro, chacun indépendant du processus r, tels que

$$S(t) = \beta\left(\frac{1}{4}\int_0^t r(s)^2 ds\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_t = r(t)\exp\left\{i\left[\alpha + \gamma\left(\int_0^t \frac{1}{r(s)^2}\,ds\right)\right]\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

1. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\frac{r(t)^2}{2} = \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \int_0^t r(s)dW_s^1 + t$, avec un processus bien défini par $W_t^1 := \int_0^t \frac{B_s^1}{r(s)} dB_s^1 + \int_0^t \frac{B_s^2}{r(s)} dB_s^2$. Calculer $\langle W^1 \rangle$, $\langle W^1, S\rangle$ et $\langle S \rangle$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{4}\int_0^t r(s)^2 ds$ est p.s. bijective. On note ϕ_t son inverse et on pose $W_t^2 := S(\phi_t)$. Montrer que (W^1, W^2) est un mouvement brownien bi-dimensionnel.
3. Montrer que le processus r est l'unique solution forte d'une équation différentielle stochastique et qu'il est indépendant du processus W^2. En déduire l'expression de S contenue dans (1).
4. Expliquer pourquoi la représentation $\mathbf{B}_t = r(t)e^{i\theta(t)}$ est bien définie p.s. pour tout $t \geqslant 0$, et montrer que $S(t) = \frac{1}{2}\int_0^t r(s)^2 d\theta(s)$. On pose $\tilde{\theta}(t) := \theta(t) - \alpha$. Calculer $\langle \tilde{\theta} \rangle$ et $\langle W^1, \tilde{\theta}\rangle$.
5. Notons ψ_t la fonction inverse (p.s. bien définie) de $t \mapsto \int_0^t \frac{1}{r(s)^2}\,ds$ et $W_t^3 := \tilde{\theta}(\phi_t)$. Montrer que (W^1, W^3) est un mouvement brownien bi-dimensionnel. En déduire que r est indépendant du processus W^3 et ensuite obtenir l'expression de $\mathbf{B}$ contenue dans (1).

Exercice II.

On note $\mathcal{W}$ l'espace de Banach $\mathrm{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|$. Soit la fonction $F : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ bornée et différentiable en tout point $w \in \mathcal{W}$, c'est-à-dire qu'il existe une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{W}$ notée $D_w F$ telle que $|F(w+h) - F(w) - D_w F(h)| = o(\|h\|)$, lorsque $\|h\| \to 0$, $h \in \mathcal{W}$. On suppose que la différentielle $D_w F$ est bornée en tout point $x \in \mathcal{W}$.

Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel et soit $(a_t)_{t\geqslant 0}$ un processus adapté, continu et borné. On note $A_t := \int_0^t a_s ds$, $t \geqslant 0$. On veut montrer que :

$$\mathrm{E}\left[F(B)\int_0^1 a_s dB_s\right] = \mathrm{E}\left[D_B F(A)\right]. \tag{2}$$

On pourra suivre les deux pas suivants :

1. On pose, pour $t, \varepsilon \geqslant 0$, $X_t^\varepsilon = B_t + \varepsilon A_t$. Montrer qu'il existe une probabilité P_ε absolument continue par rapport à P sur chaque $\mathcal{F}_t$ (on pourra chercher le processus densité $M^\varepsilon := d\mathrm{P}_\varepsilon / d\mathrm{P}$), telle que le processus X^ε soit un P_ε-mouvement brownien.
2. En déduire que $\varepsilon \mapsto \mathrm{E}[F(X^\varepsilon)M_1^\varepsilon]$ ne dépend pas de ε, donc sa dérivée par rapport à ε (que l'on calculera soigneusement en $\varepsilon = 0$) est nulle et ensuite obtenir l'égalité (2).

Tournez la page S.V.P.

Exercice III.

Soient $\sigma, b \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ deux fonctions ayant dérivées première et seconde bornées et B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

et si on note $X(t,x)$ sa solution, considérons aussi

$$dY_t = \sigma'(X(t,x))Y_t dB_t + b'(X(t,x))Y_t\, dt, \quad Y_0 = 1. \tag{4}$$

Dans la suite $t_0 > 0$ est arbitraire, $p \geqslant 1$ est un entier quelconque.

1. Montrer que $\mathrm{E}\{\sup_{s\leqslant t_0} |X(s,x) - X(s,y)|^{2p}\} \leqslant \text{cste}|x-y|^{2p}$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $x \mapsto X(\cdot, x)$ est uniformément continue p.s. On pose $\tilde{X}(t,x) = \lim_{s\to t} X(s,x)$. Montrer que $\tilde{X}$ est une version continue en (t,x) p.s., solution de (3). Pour simplifier l'écriture, dans la suite de l'exercice (ainsi que dans (4)) nous allons noter encore $X(t,x)$ cette version.
3. Montrer qu'il y a existence et unicité trajectorielle pour (4) et que la solution admet des moments de tout ordre (on pourra vérifier que $\mathrm{E}\{\sup_{s\leqslant t_0} |Y_s|^p\} \leqslant \text{cste}$).
4. Si on note $Y(t,x)$ la solution de (4), montrer qu'il existe une version continue en (t,x) p.s.
5. On pose $Z(t,x) := X(t,x) - \int_0^x Y(t,u)du$ et nous allons supposer un instant que $b \equiv 0$. Montrer que $\mathrm{E}\{\sup_{s\leqslant t_0} |Z(s,x) - Z(s,y)|^2\} \leqslant \text{cste}|x-y|^4$. On pourra écrire
$$Z(t,x) - Z(t,y) = \int_0^t [\sigma(X(s,x)) - \sigma(X(s,y)) - \sigma'(X(s,x))(X(s,x) - X(s,y))dB_s$$
$$+ \int_0^t \sigma'(X(s,x))(Z(s,x) - Z(s,y))dB_s + \int_0^t \{\int_y^x Y(s,u)(\sigma'(X(s,u)) - \sigma'(X(s,x)))du\}dB_s$$
Noter les termes $\Delta_1(t), \Delta_2(t), \Delta_3(t)$ et majorer soigneusement $\mathrm{E}\sup_{s\leqslant t} \Delta_i(t)^2$ pour $i = 1,2,3$.
6. Pour $n \geqslant 1$ entier et $k \in \{0, \dots, n\}$ on pose $x_k := x + \frac{k}{n}(y-x)$. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,
$$\mathrm{P}(|Z(t,x) - Z(t,y)| > \lambda) \leqslant n \max_{k\leqslant n} \mathrm{P}(|Z(t,x_{k+1}) - Z(t,x_k)| > \lambda/n) \leqslant {}^{\text{cste}|y-x|^4}/_{n\lambda^2}$$
et ensuite que le membre de gauche de cette inégalité est nul. En déduire que $Z(t,x) = Z(t,y)$ p.s. et donc $x \mapsto Z(t,x)$ est une constante.
7. En déduire que la solution de l'équation (3) est dérivable par rapport à x la condition initiale et montrer que $\frac{d}{dx}X(t,x)$ satisfait l'équation (4). Pourquoi on peut lever l'hypothèse $b \equiv 0$?

Exercice IV.

Soit X une semimartingale réelle continue et considérons, pour $t \geqslant 0$, $g_t := \sup\{s \leqslant t : X_s = 0\}$, le dernier zéro de X avant t et $d_t := \inf\{s \geqslant t : X_s = 0\}$ le premier zéro de X après t.

1. Montrer que si $(h_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus adapté continu à droite et borné,
$$h_{g_t} X_t = h_0 X_0 + \int_0^t h_{g_s} dX_s,\ t \geqslant 0. \tag{5}$$
On pourra d'abord considérer le cas $h = \mathbb{1}_{(0,\tau]}$ avec τ un temps d'arrêt, et remaquer que $h_{g_t} = \mathbb{1}_{\{t\leqslant d_\tau\}}$.
2. Soit $X = B$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0 et on note $(L_t)_{t\geqslant 0}$ son temps local en 0. Que valent L_{g_t} et L_{d_t} ? Soit $(h_t)_{t\geqslant 0}$ un processus adapté continu borné. Montrer que $(h_{g_t} B_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale locale et que son temps local en 0 est $(\int_0^t |h_s| dL_s)_{t\geqslant 0}$. On pourra utiliser (5) d'abord avec h et ensuite avec $|h|$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue bornée et notons $F(x) = \int_0^x f(y)dy$. Montrer que $(F(L_t) - f(L_t)|B_t|)_{t\geqslant 0}$ est une martingale. On pourra utiliser $h_t := f(L_t)$.
4. Soit $S_t = \sup_{s\leqslant t} B_s$. Montrer que $(F(S_t) - f(S_t)(S_t - B_t))_{t\geqslant 0}$ est une martingale. On pourra utiliser (5) pour la semimartingale $X_t = S_t - B_t$, ainsi que l'égalité $S_{g_t} = S_t$.