# Processus stochastiques continus : examen

jeudi 20 décembre 2007 - durée 2 heures
calculatrice interdite - documents de cours autorisés

*Notations et rappels* : dans tous les exercices on se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$ satisfaisant les "conditions habituelles" ; on se donne également un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel $\{B_t; t \geqslant 0\}$ issu de 0 ; la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sera notée $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que :

- pour tout $x > 0$, $1 - \Phi(x) \leqslant \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$ et si on note $\gamma(x) := \Phi'(x)$, alors $\gamma'(x) = -x\gamma(x)$ ;
- si $g$ positive mesurable bornée satisfait $g(t) \leqslant a + b \int_0^t g(s)ds$, $\forall t \in [0, T]$, $(a, b, T > 0)$, alors $g(t) \leqslant ae^{bt}$, $\forall t \in [0, T]$ (lemme de Gronwall) ;
- une suite de v.a.r. $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ converge p.s. vers 0 si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(|\xi_n| > \varepsilon) < \infty$ (lemme de Borel-Cantelli de convergence p.s.) ;
- les processus $\{\frac{1}{c} B_{ct}; t \geqslant 0\}$ $(c > 0)$ et $\{tB_{\frac{1}{t}}; t \geqslant 0\}$ sont des mouvements browniens.

**Exercice I.**

Soit le processus continu $X_t := tB_t$, pour $t \geqslant 0$. Calculer les différentielles stochastiques $dX_t$ et $d\langle X\rangle_t$. On considère encore un processus continu $\{Y_t; t \geqslant 0\}$ avec $Y_0 = 1$ et tel que sa différentielle stochastique satisfait $dY_t = Y_t dB_t + \frac{1}{2} Y_t dt$. Trouver l'expression de $Y$. On pourra rechercher un processus positif et exprimer $d \ln(Y_t)$. Calculer les différentielles stochastiques $d\langle X, Y\rangle_t$ et $d(X_t Y_t)$.

**Exercice II.**

Soit $\tau$ un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt et on introduit le processus $W_t := 2B_{t\wedge\tau} - B_t$, pour $t \geqslant 0$. Montrer que le processus $\{\mathbb{1}_{[0,\tau]}(t); t \geqslant 0\}$ est progressif, que $W_t = \int_0^t (2\mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) - 1) dB_s$, pour $t \geqslant 0$, et que $W$ est un mouvement brownien.

**Exercice III.**

Soient $\Phi$ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard et $T > 0$ déterministe fixé. Montrer que le processus $M_t := \Phi(B_t/\sqrt{T-t})$ est une martingale sur $[0, T]$. On pourra exprimer $M_t$ à l'aide d'une intégrale stochastique et déduire $\mathrm{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ pour tous $s < t < T$ ; ensuite on pourra calculer $\lim_{t\to T} M_t$ et passer à la limite dans l'égalité précédente.

**Exercice IV.**

Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne (constante de Lipschitz $L$), $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in ]0, 1]$. On considère les équations différentielles stochastique et ordinaire suivantes :

$$Z_0 = x, \quad dZ_t = \varepsilon dB_t + b(Z_t)dt, \quad t > 0 \quad \text{et} \quad z(0) = x, \quad dz(t) = b(z(t))dt, \quad t > 0.$$

Justifier l'existence et l'unicité des solutions de ces deux équations différentielles, notées respectivement $\{Z_t^{x,\varepsilon}; t \geqslant 0\}$ processus continu et $z^x : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ fonction de classe $\mathrm{C}^1$.

Tournez la page S.V.P.

**1)** Soit $T > 0$. Montrer que $\Delta(T) := \sup_{s\in[0,T]} |Z_s^{x,\varepsilon} - z^x(s)| \leqslant \varepsilon \sup_{s\in[0,T]} |B_s| e^{TL}$.

**2)** Soit $\delta > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(\Delta(T) > \delta) \leqslant 4\mathrm{P}(B_1 > {}^{C}\!/\varepsilon)$, où $C$ est une constante positive qui dépend de $T, \delta$ et $L$.

**3)** En déduire que pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$, il existe deux constantes positives $c_1, c_2$, dont les valeurs ne dépendent pas de $(x, \varepsilon)$, telles que

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in[0,T]} |Z_t^{x,\varepsilon} - z^x(t)| > \delta) \leqslant c_1 \exp\left(-\frac{c_2}{\varepsilon^2}\right).$$

**4)** Que peut-on déduire, lorsque $\varepsilon \to 0$ ?

**Exercice V.**

Soit $B$ un mouvement brownien réel issu de 0. Définissons

$$A_t := \int_0^t e^{2B_s+s} ds \quad \text{ et } \quad U_t = \exp\left(B_{A_t^{-1}} + \frac{1}{2}A_t^{-1}\right),$$

où $A_t^{-1} := \inf\{s : A_s > t\}$.

**1)** Écrire la décomposition canonique de la semimartingale $V_t := e^{B_t+t/2}$. En déduire que $U$ satisfait à une équation différentielle stochastique avec $\sigma(x) \equiv 1$ et $b(x) = {}^1\!/x$. On pourra exprimer de deux façons $\int_0^t ({}^1\!/V_s) dA_s$ et observer que $U_{A_t} = V_t$. On admettra l'unicité en loi de l'équation différentielle stochastique obtenue.

**2)** Soit $\mathbf{B}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ issu de $\mathbf{B}_0 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et on note $\|\mathbf{B}\|$ la norme euclidienne de $\mathbf{B}$. Justifier que p.s. $\|\mathbf{B}\|$ ne s'annule jamais. En appliquant la formule d'Itô et à l'aide de la question précédente établir une liaison entre $U$ et $\|\mathbf{B}\|$.

**3)** Justifier que $\lim_{t\to\infty}({}^{B_t}\!/t) = 0$ p.s. Montrer que $\lim_{t\to\infty} A_t = \infty$ p.s. et ensuite que $\lim_{t\to\infty} U_t = \infty$ p.s. En déduire que $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{B}_t\| = \infty$ p.s.

**4)** Montrer que $\lim_{t\to\infty}({}^{\ln A_t}\!/\ln t) = 1$ p.s. et que $\lim_{t\to\infty}({}^{\ln V_t}\!/\ln t) = {}^1\!/2$ p.s.
En déduire que $\lim_{t\to\infty}({}^{\ln U_t}\!/\ln t) = {}^1\!/2$ p.s. et ensuite que $\lim_{t\to\infty}({}^{\ln \|\mathbf{B}_t\|}\!/\ln t) = {}^1\!/2$ p.s.