Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

MIEE L1, Module AN1
2016–2017

Examen Terminal du 4 Janvier 2017. Durée : 2 heures
Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le sujet tient sur deux pages.
Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation.
Bon travail !

Exercice 1

1. Trouver tous les nombres complexes, sous forme algébrique, $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

2. Résoudre l'équation

$$(z-1)\big(z^2 + (1-\sqrt{3}\,i)z - \sqrt{3}\,i\big) = 0.$$

3. Quelle particularité a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 2

1. Énoncer la proposition relative à la caractérisation séquentielle de la limite.

Dans la suite on considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. On introduit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2(n+1)\pi}.$$

Donner, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

3. La fonction f admet-elle une limite à droite en 0 ?

Exercice 3

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans la suite on considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \frac{1}{2}e^x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right).$$

2. Expliquer pourquoi f est continue et dérivable.

3. Calculer la dérivée f'.

4. Montrer que f est strictement monotone.

5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

6. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.

Tourner S.V.P.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \cosh x - (\cosh a + (x-a)\sinh a)\ .$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner la dérivée.

2. Étudier le signe de la dérivée f'.

3. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

4. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

5. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \cosh a + (x-a)\sinh a \leq \cosh x\,.$$

Exercice 5

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad g(x) = x^2 \arctan x\,.$$

1. Justifier que l'intégrale suivante est bien définie :

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx\,.$$

2. En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction arctan est-elle dérivable ? Donner explicitement sa dérivée en les points où c'est possible.

3. On pose

$$J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx\,.$$

Donner une relation entre I et J à l'aide d'une intégration par parties qu'on justifiera soigneusement.

4. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x + \frac{ax+b}{1+x^2}\,.$$

5. Donner la valeur de J en fonction de a et b, puis sa valeur en remplaçant a et b par leurs valeurs explicites.

6. Que vaut I ?

Exercice 6

1. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$. Trouver deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \cos^3(x) = a\cos x + b\cos(3x)\,.$$

2. Donner une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,dx$.

3. (Bonus) Retrouver les résultats de la question précédente en utilisant un changement de variable.