Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

MIEE L1, Module AN1
Année 2015-2016

Examen terminal - 18 décembre 2015 - durée 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le sujet tient sur deux pages. Les exercices sont indépendants. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1. *(Questions de cours)*

1. Donner la définition avec les quantificateurs d'une fonction continue en un point.
2. Donner la définition d'une fonction dérivable en un point.
3. Montrer que toute fonction dérivable en un point est forcément continue en ce point.
4. Donner un exemple pour illustrer que la réciproque du point 3. n'est pas vraie en général. Ne pas fournir de démonstration.

Exercice 2. *(Nombres complexes)*

1. Donner sous forme algébrique et exponentielle les solutions complexes de $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
2. En déduire l'expression algébrique de $e^{i\frac{\pi}{12}}$.
3. Donner sous forme exponentielle les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^4 = 1 + i\sqrt{3} \qquad (\star)$$
4. Calculer la somme de toutes les solutions de l'équation $(\star)$.

Exercice 3. (*Calcul de limites et d'intégrales*)

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(1+x)^2} \arctan(1/x)$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \cos\left(1 + {}^1/_{x^2}\right)}{x\ln(2) + {}^1/_{x^2}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_1^e x \cdot \big(\ln(x)\big)^n \, dx$. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n.$$
En déduire la valeur de I_4.
4. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = 2\cos(x)\sin(x)e^{\cos(2x)}$, en utilisant un changement de variables convenable.

Exercice 4. (*Étude de fonctions et inégalités*)

1. Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.
Dans la suite, on considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par
$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \ln^2(1+x).$$
2. Calculer la dérivée de f.
3. En utilisant l'inégalité suivante : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$, montrer que
$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{2x}{1+x}\cdot$$

Tourner S.V.P.

4. En déduire que
$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f'(x) \leq 2.$$
5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \geq 0, \quad \ln^2(1+x) \leq 2x.$$

Exercice 5. *(Fonctions et suites réelles)*
On considère la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = x + \tan(x).$$

1. Etudier la parité de f.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de f.
3. Montrer que f est bijective et que sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable.
4. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$.

   Soit n un entier naturel et on considère l'équation d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\text{(E)} \quad x + \tan(x) = n.$$
5. Déduire de 3. que cette équation admet une unique solution x_n et l'exprimer à l'aide de f^{-1}.
6. Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.