Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

M1 et Mag1 de Mathématiques
Probabilités de base
27 juin 2012

Examen de rattrapage

Le sujet comporte deux pages et la durée est de **2 heures***. Les exercices sont indépendants. Une rédaction rigoureuse et des réponses argumentées mais concises sont attendues. Les documents et calculatrices ne sont pas autorisées. Des rappels succincts sont donnés à la fin du sujet.*

Exercice 1 Sur l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, on considère la variable aléatoire $U(\omega) := \omega - 1$.

1. Trouver la fonction de répartition de U. Cette variable est-elle à densité ? discrète ?
2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $U \in \mathrm{L}^p$ et calculer les moments μ_p d'ordre p de U.
3. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U et on pose, pour tout $n \geq 1$,
$$T_n := \frac{U_1^3 + \cdots + U_n^3}{U_1^2 + \cdots + U_n^2}.$$
Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une constante qu'on évaluera.
Indication. On pourra étudier les limites des deux suites définies par $X_n := \frac{U_1^3+\cdots+U_n^3}{n}$ et $Y_n := \frac{U_1^2+\cdots+U_n^2}{n}$. Justifier soigneusement les passages à la limite.
4. Que vaut la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$, où $Z_n := \sqrt{n}(X_n + \frac{1}{4})$?
Indication. On pourra utiliser un résultat remarquable de convergence en loi.

Exercice 2 (Couple gaussien) Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées réduites et ρ un réel tel que $|\rho| < 1$. On pose $U = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}\, Y$.

1. Quelle est la loi de U ?
2. Déterminer la loi du couple (X, U) en calculant la fonction caractéristique $\phi_{(X,U)}(s,t) = \mathbb{E}[\exp(i(sX + tU))]$ de (X, U).
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq 0, U \geq 0) = \frac{1}{2} - \frac{\arccos \rho}{2\pi}.$$
Indication. On exprimera la probabilité cherchée comme une intégrale double en utilisant les lois de X et de Y, puis on passera en coordonnées polaires en choisissant $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = \rho$ et en étant vigilant au domaine d'intégration.

Exercice 3 (Somme et max d'exponentielles) Soient T_n, $n \geq 1$, des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. On considère

$$L_n = 2T_2 + 3T_3 + \cdots + nT_n.$$

1. Montrer que, lorsque n est grand,

$$\mathbb{E}[L_n] \sim 2\ln n, \quad \mathrm{Var}(L_n) \sim \frac{2\pi^2}{3}.$$

2. Montrer que la transformée de Laplace $H_n(t) = \mathbb{E}[\exp(tL_n)]$ est donnée par

$$H_n(t) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k-1-2t}.$$

3. Dans cette partie, on montre que L_n s'interprète comme un maximum de variables exponentielles. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1/2)$. Notons $Y_n = \max(Z_i : 1 \leq i \leq n)$.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(Y_n \leq x)$ et en déduire que Y_n admet une densité qu'on déterminera.
   (b) On note $G_n(t) = \mathbb{E}[\exp(tY_n)]$ la transformée de Laplace de Y_n. Montrer que pour $t < 1/2$ et $n \geq 2$, on a

$$G_n(t) = \frac{n}{1-2t}\, G_{n-1}(t - 1/2).$$

   (c) En déduire que $L_n \sim Y_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.
4. (a) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(L_n/\ln n \leq 2(1-\epsilon)) = \exp(-n^{\epsilon}(1+o(1)))$.
   (b) En déduire $\liminf_{n\to+\infty} L_n/\ln n \geq 2$ presque sûrement.
5. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(L_n/\ln n \geq 2(1+\epsilon)) = n^{-\epsilon(1+o(1))}$.
   (b) Soit $\delta > 1/\epsilon$. Pour $k \geq 1$, posons $n_k = [(k+1)^{\delta}]$ où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Déduire de (a) que $\limsup_{k\to+\infty} L_{n_k}/\ln n_k \leq 2$ presque sûrement.
6. Montrer que $L_n/\ln n$ converge presque sûrement vers 2.
7. (a) Montrer que $F(t) = \exp(-\exp(-t/2))$, $t \in \mathbb{R}$, est une fonction de répartition.
   (b) Montrer que $L_n - 2\ln n$ converge en loi vers la loi de fonction de répartition F quand $n \to +\infty$.

Rappels :
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ a pour densité $\lambda \exp(-\lambda x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a pour fonction caractéristique $\mathbb{E}[e^{itX}] = \exp(imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2)$.
- (X, Y) vecteur gaussien centré de covariance $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ a pour fonction caractéristique

$$\exp\left(-\frac{\sigma_1^2 t^2 + 2\rho st + \sigma_2^2 s^2}{2}\right).$$