Université de Rennes 1 Année 2020-2021
Licence de Mathématiques L3 SSF

Examen Terminal

le 19 avril 2021 ; durée 2 heures

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours ou presque*

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

i) Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$ deux éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Démontrer l'inégalité $\max\big(\|x\|, \|y\|\big) \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\|x-y\|$. On pourra supposer, par exemple, que $\|x\| \geq \|y\|$.

ii) Soient f et $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ des fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point, telles que pour tout $t \in I$, $|f_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n$ où (α_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur I ? simplement sur I ?
Application : $f_n(t) = t + \frac{1}{n}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$.

iii) Soit (c_n) une suite convergente de nombres complexes. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n$?

iv) Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite 0, telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$?

Exercice 2 *Continuité d'une application linéaire*

Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Vérifier si l'application T suivante est bien à valeurs dans ℓ^∞, et si elle est linéaire et continue :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty,\ T(u) = w \ \text{ où } w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i.$$

Peut-on réaliser le cas d'égalité dans l'inégalité donnant sa continuité ?

Exercice 3 *Régularité d'une fonction*

Montrer que $s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{n^2}$ est une fonction bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Donner l'expression de la dérivée s' et calculer $\lim_{t\to 0} s'(t)$.

Exercice 4 *Rayons de convergence*

Déterminer les rayons de convergence des séries entières : $\sum_{n\geq 1} \frac{\cosh n}{n} z^n$, $\sum_{n\geq 0} 2^n e^{i\frac{\pi}{3}n} z^n$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!n^n}{(3n)!} z^n$.

Exercice 5 *Une série entière*

Soit la série entière $f(t) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} t^{2n}$.

a) Trouver l'intervalle de convergence I de cette série entière.

b) Que vaut f sur I ? On pourra montrer que pour tout $t \in I$, $f(t)$ s'écrit comme la somme de deux séries entières qu'on sait calculer explicitement.

Exercice 6 *Développer en série*

Trouver le développement en série entière autour de 0 de la fonction $h(t) = \frac{1}{2}\big(\cosh t + \cos t\big)$. Préciser le rayon de convergence de la série entière trouvée.