Université de Rennes 1 — Année 2018-2019
Licence de Mathématiques — L2 CMR et L3 SSF

Examen Terminal

le 3 mai 2019 ; durée 2 heures ; documents, calculatrices et téléphones interdits

Le sujet est rédigé sur deux pages ; le barème sera adapté à la longueur du sujet.

L'évaluation prendra en compte seulement les réponses justifiées et rédigées avec soin ! Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours*

1. On se place dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Donner la définition d' "une boule ouverte" $B(a,r)$ et montrer l'égalité $B(a,r) = \{a + ru : \|u\| < 1\}$.
2. Pour une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, donner la définition de sa convergence uniforme vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Si les f_n et f sont bornées sur I, s'agit-il d'une convergence pour une norme ? Si oui, laquelle ?
3. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel pour des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

Exercice 2 *Deux séries entières de variable réelle*
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} t^n$.
   Trouver son rayon de convergence et exprimer sa somme en termes de fonctions usuelles.
2. Soit la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} t^{2n+1}$.
   (a) Trouver le rayon de convergence R de cette série.
   Y a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
   (b) Justifier que la fonction $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} t^{2n+1}$ est continue sur $[-R, R]$.
   (c) Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$.
   En déduire les deux égalités suivantes
   $$S(t) = \int_0^t \ln(1+s^2)\, ds = t\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan(t), \quad t \in]-R, R[.$$
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 3 *Fonctions développables en séries entières*
Donner le développement en série entière des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence

$$(a)\;\; p(t) = \ln(1+t-2t^2); \quad (b)\;\; q(t) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-t}) & \text{si } t < 0. \end{cases} .$$

Rappel : $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

<u>**Bonus**</u> **:** Justifier que la fonction q est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Tournez S.V.P.

Exercice 4 *Suite de fonctions*

1. Montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est 1–lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. On pourra analyser sa dérivée.
2. Soit (g_n) une suite de fonctions, avec $g_n : I \to \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers $g : I \to \mathbb{R}$ sur l'intervalle I. On pose $h_n = \dfrac{g_n}{1+g_n^2}$. Montrer que la suite de fonctions (h_n) converge uniformément sur I et donner sa limite h.

Exercice 5 *Une fonction prolongeable par continuité*

1. Montrer que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|_2^2$, où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f l'application de $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \dfrac{2x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Montrer que $|f(x,y)| \leq 3\|(x,y)\|_2$, pour tout $(x,y) \in D$.
3. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.
   Quelle valeur faudrait-il attribuer à f en $(0,0)$ pour qu'elle soit continue ?

Exercice 6 *Une norme sur* $\mathbb{R}^2$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose $N(\mathbf{x}) = \max\{|x_2 - x_1|, |x_1|\}$. Montrer que $N(\cdot)$ est une norme.

<u>Bonus</u> : Représenter la boule unité fermée pour cette norme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : N(\mathbf{x}) \leq 1\}$.