Université de Rennes 1 — Année 2017-2018
Licence 2ème Mathématiques — Compléments Math Recherche

Examen Terminal

le 20 avril 2018 ; durée 2h00 ; documents, calculatrices et téléphones interdits

Le sujet est rédigé sur deux pages ; le barème sera adapté à la longueur du sujet.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'évaluation. Bon travail !

Exercice 1 *Questions de cours (ou presque)*
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. On note $S(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R. Énoncer et démontrer le résultat de dérivabilité de S, en justifiant soigneusement la valeur du rayon de convergence de la série dérivée $S'(t)$. S' est-elle continue ?
2. Démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est une fonction uniformément continue.

Exercice 2 *Normes de suites*
On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

1. Montrer que la quantité $N_{k,\infty}(a) = \sum_{n=0}^{k} |a_n| + \sup_{n\geq k+1} |a_n|$ définit une norme sur l'espace ℓ^∞.
2. On rappelle qu'une norme usuelle sur ℓ^∞ est $N_\infty(a) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Peut-on trouver deux constantes $c, c' > 0$ telles que $cN_\infty(a) \leq N_{k,\infty}(a) \leq c'N_\infty(a)$, pour tout $a \in \ell^\infty$? Commenter la réponse obtenue.

Exercice 3 *Gradient de la norme euclidienne*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \|u\|_2$, la norme euclidienne, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.

1. En quels points l'application f est-elle différentiable ? Donner l'expression de la différentielle $df(u)h$, quand elle existe. On pourra utiliser le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. Si u s'écrit $u = (x, y)$, exprimer $f(x, y)$, puis calculer les dérivées partielles de f. Déduire l'expression de $\nabla f(x, y)$, pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Comparer avec le résultat du premier point.

Exercice 4 *Fonctions invariantes par translation*
On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y).$$

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
2. On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et $F(u, v) = f(x, y)$. Montrer que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0$.
   En déduire qu'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x, y) = g(x - y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   On pourra d'abord exprimer x et y en fonction de u et v et trouver $F(u, v)$ et enfin conclure.

Tournez S.V.P.

Exercice 5 *Développement en série entière*

Développer en série entière la fonction $f(t) = \ln(a+t)$, avec $a > 0$. On précisera le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 6 *Partie fermée et suite de fonctions*

Soit $E = \mathrm{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé avec $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et soit l'ensemble $A = \left\{f \in E : f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1\right\}$. Montrer que A est une partie fermée en utilisant la caractérisation séquentielle d'un partie fermée.

Exercice 7 *Deux séries de fonctions*

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $f : t \mapsto \sum_{n\geq 1} e^{-t\sqrt{n}}$ définie sur un ensemble à préciser. Trouver l'ensemble de continuité de f, puis $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. On étudiera la convergence normale de la série sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.

   <u>Bonus :</u> Déterminer un équivalent de $f(t)$ quand $t \to 0+$. On pourra utiliser la monotonie de la fonction $u \mapsto e^{-t\sqrt{u}}$ et comparer f à l'intégrale de cette fonction sur deux intervalles convenablement choisis.
2. Soit $g : t \mapsto \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} t^n$ définie sur un intervalle à préciser. Exprimer la fonction g à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1,1[$. On pourra d'abord dériver g.

   <u>Bonus :</u> Calculer $g(1)$ et $g(-1)$. On étudiera la convergence normale de la série donnant g.