UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 1ère année
Année 2008/2009

Probabilités de base : examen

vendredi 19 décembre 2008 - durée 2 heures - résumé autorisé

Exercice I.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières positives dont la loi est donnée par $\mathrm{P}(X = n) = \frac{k}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$. Que doit valoir k ? Pour quels $p \in (0, \infty)$, $X \in \mathrm{L}^p$?

Exercice II.

Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\sin(U)$, où $U \sim \mathcal{U}_{[0,\pi/2]}$, ainsi que sa densité, lorsqu'elle existe.

Exercice III.

Considérons n variables aléatoires $G_1, \ldots, G_n$ indépendantes, de même loi gaussienne standard et notons $\overline{G} := \frac{1}{n}(G_1 + \ldots + G_n)$, $H_j := G_j - \overline{G}$, $j = 1, \ldots, n$. Montrer que la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(\overline{G}, H_1, \ldots, H_n)$ satisfait

$$\varphi(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{t_0}{n} + t_j - \bar{t}\right]^2\right\}, \quad (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

où nous avons noté $\bar{t} = \frac{1}{n}(t_1 + \ldots + t_n)$. Utiliser cette égalité pour montrer que $\overline{G}$ est indépendante de $(H_1, \ldots, H_n)$. En déduire que la moyenne empirique $\overline{G}$ est indépendante de la variance empirique $S^2 := n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(G_j - \overline{G})^2$.

Exercice IV.

Pour $n \geqslant 1$ entier on considère les fonctions f_n données par $f_n(x) := \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions f_n sont des densités de probabilité. Pour $n \geqslant 1$ entier, soit X_n une variable aléatoire de densité f_n. Que vaut $\mathrm{E}[|X_n|^p]$, pour $p \geqslant 1$?
2. Étudier la convergence vers 0 en L^p ($p \geqslant 1$), en probabilité, en loi de la suite $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$.
3. On suppose de plus que les variables X_n sont indépendantes. Montrer que dans ce cas, la suite $\{X_n\}$ ne converge pas vers 0 presque sûrement. On pourra vérifier que $\mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) = \dfrac{2}{\pi}\arcsin\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2\varepsilon^2}}\Big) \sim_{n\to\infty} \dfrac{2}{\pi n \varepsilon}$.
4. On ne suppose plus l'indépendance des X_n et en revanche on pose $X_n := \frac{X}{n}$, avec X une variable de loi de Cauchy. Montrer que X_n est de densité f_n et que cette fois la suite $\{X_n\}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice V.

Des spectateurs arrivent devant un guichet de théatre encore fermé. On pose $D_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$ on note D_n la durée de temps entre les arrivées du $(n-1)$-ième et du n-ième spectateur. Nous allons supposer que $\{D_n\}_{n\geqslant 1}$ constitue une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Dans la suite $t > 0$ et nous allons étudier le nombre $N(t)$ de spectateurs arrivés devant le guichet jusqu'au moment t. On définit $N_0 = 0$ et $N(t) := \max\{n : D_0 + D_1 + \ldots + D_n \leqslant t\}$.

Tournez la page S.V.P.

1. Trouver la fonction caractéristique de la variable aléatoire $D_1 + \ldots + D_n$. S'agit-il d'une loi remarquable ?
2. Justifier soigneusement les égalités suivantes $\{N(t) = 0\} = \{D_1 > t\}$ et $\{N(t) = n\} = \{D_1 + \ldots + D_n \leqslant t$ et $D_1 + \ldots + D_{n+1} > t\}$. Calculer $\mathrm{P}(N(t) = 0)$. Prouver que $\mathrm{P}(N(t) = n) = \mathrm{P}(D_1 + \ldots + D_n \leqslant t) - \mathrm{P}(D_1 + \ldots + D_{n+1} \leqslant t)$.
3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$ entier, $\mathrm{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. Quelle est la loi de $N(t)$? Calculer le nombre moyen de clients arrivés jusqu'au temps t. Que vaut $\mathrm{E}[\frac{N(t)}{t}]$?
4. Notons $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < \ldots$ les instants d'arrivée des spectateurs de telle sorte que pour $n \geqslant 1$, $D_n = T_n - T_{n-1}$. Que vaut la limite p.s., quand $n \to \infty$, de $\frac{T_n}{n}$?
5. Justifier soigneusement que, pour tout $n \geqslant 1$ entier, $\{N(t) < n\} = \{T_n > t\}$. Montrer que $\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(T_n > t) = 0$. En déduire que $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ p.s.
6. Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$ entier, $T_{N(t)} \leqslant t < T_{N(t)+1}$. En déduire un encadrement de $\frac{t}{N(t)}$ et ensuite calculer sa limite p.s., quand $t \to \infty$.
7. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\frac{N(n)}{n} - \lambda) = G \sim \mathcal{N}(0, \lambda)$ en loi. On pourra utiliser les fonctions caractéristiques. Que peut-on dire de la limite en loi, quand $t \to \infty$, de $\sqrt{t}(\frac{N(t)}{t} - \lambda)$?