UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 1ère année
Année 2007/2008

Probabilités de base : examen

lundi 17 décembre 2007 - durée 2 heures
calculatrice interdite - documents (cours manuscrit ou imprimé) autorisés

Exercice I.

Soit (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance égale à l'identité I_2 et soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Définissons

$$X' = \mathrm{Re}(z(X+iY)) \quad \text{et} \quad Y' = \mathrm{Im}(z(X+iY)).$$

Montrer que (X', Y') est un couple gaussien dont on déterminera l'espérance et la matrice de covariance. Les variables X' et Y' sont-elles indépendantes ? Déterminer la fonction caractéristique de (X', Y'). À quelle condition sur z a-t-on $(X', Y') \sim (X, Y)$?

Exercice II.

Soit F_k la fonction

$$F_k(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^k} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases},$$

où $k \geqslant 2$ est un entier.

1) Montrer que F_k est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, notée X_k.

2) Montrer que $X_k > 1$ p.s. et que X_k admet une densité que l'on calculera.

3) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_k = \{|X_k - 1| > \varepsilon\}$.

(a) Calculer $\mathrm{P}(A_k)$. Étudier la convergence en probabilité de la suite $\{X_k\}_{k\geqslant 2}$, lorsque $k \to \infty$.

(b) Cette suite converge-t-elle presque sûrement ? Justifier soigneusement la réponse.

4) Justifier que X_k est intégrable et calculer son espérance ainsi que $\mathrm{E}(|X_k - 1|)$.

5) (a) Trouver l'ensemble de réels $p \geqslant 1$ pour lesquels $X_k \in \mathrm{L}^p$ et calculer $\|X_k\|_p^p$.

(b) Soit G une variable aléatoire réelle de loi gaussienne standard (on ne suppose pas l'indépendance de G et X_3). Montrer que GX_3 est intégrable, puis que $GX_3 \in \mathrm{L}^2$.

6) Montrer que la suite $\{X_k\}_{k\geqslant 2}$ tend vers 1, dans L^1, lorsque $k \to \infty$. Cette suite converge-t-elle dans L^2, lorsque $k \to \infty$?

Dans la suite de l'exercice on suppose $k = 3$.

7) Soit $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F_3 et on note

$$U_n = Y_1 + \ldots + Y_n \quad \text{et} \quad V_n = Y_1^2 + \ldots + Y_n^2.$$

(a) Que vaut la limite presque sûre de la suite $\{\frac{U_n}{V_n}\}_{n\geqslant 1}$, lorsque $n \to \infty$? On pourra d'abord étudier les suites $\{\frac{U_n}{n}\}_{n\geqslant 1}$ et $\{\frac{V_n}{n}\}_{n\geqslant 1}$. Justifier soigneusement les passages à la limite.

Tournez la page S.V.P.

(b) Pourquoi la suite $\{\frac{1}{\sqrt{n}}(U_n - \frac{3n}{2})\}_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle en loi, lorsque $n \to \infty$? Quelle est la loi limite (on indiquera ses paramètres) ? Peut-on utiliser le même type d'argument pour la convergence en loi de la suite $\{\frac{1}{\sqrt{n}}(V_n - 3n)\}_{n\geqslant 1}$?

8) Avec les notations du point précédent, montrer les deux convergences suivantes, lorsque $n \to \infty$ et pour $t \geqslant 1$ fixé :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_j>t\}} \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{1}{t^3} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_j>t\}} - \frac{1}{t^3}\right) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^6}).$$

Exercice III.

Une urne contient des boules rouges et noires. La proportion de boules rouges est $p \in]0, 1[$. On effectue des tirages avec remise dans l'urne en notant à chaque fois la couleur obtenue et on dit avoir obtenu un "succès" si une boule rouge est sortie. Les tirages cessent après avoir noté l'obtention de n boules rouges (n succès), $n \geqslant 1$. Soit T la variable aléatoire égale au nombre total de boules tirées.

1) Quel est l'ensemble de valeurs possibles de T ?

2) Calculer $\mathrm{P}(T = n)$ et $\mathrm{P}(T = n + 1)$.

3) Donner une explication soigneuse et succincte de la formule suivante :

$$\mathrm{P}(T = k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n} =: \pi_k$$

pour k appartenant à l'ensemble trouvé au premier point.

Quelle loi obtient-on si $n = 1$?

4) Calculer $\mathrm{E}(T)$, $\mathrm{E}\left[T(T + 1)\right]$ et en déduire $\mathrm{Var}(T)$. Calculer $\mathrm{E}\left[(n - 1)/(T - 1)\right]$, pour $n \geqslant 2$. On pourra remarquer que $\sum_k \pi_k = 1$.