Master 2 Recherche 2005-2006

Martingales et intégration stochastique - contrôle final (M.Gradinaru)

13 mars 2006 - durée 3 heures - notes manuscrites autorisées

Soit $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ une martingale locale continue issue de 0 et on introduit la semimartingale exponentielle :

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\},\ t \geqslant 0.$$

A. *Quelques propriétés de* $\mathcal{E}(M)$*.*

a) Montrer que $\{\mathcal{E}(M)_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ est une martingale locale continue satisfaisant

$$\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_0 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s dM_s,\ t \geqslant 0,$$

et que M est donnée par la formule

$$M_t = \ln \mathcal{E}(M)_0 + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(M)_s} d\mathcal{E}(M)_s,\ t \geqslant 0.$$

b) Prouver que $\mathcal{E}(M)$ est une surmartingale et que $\mathrm{E}\left[\mathcal{E}(M)_t\right] \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$.

c) En déduire que $\mathcal{E}(M)$ est une (vraie) martingale si et seulement si $\mathrm{E}\left[\mathcal{E}(M)_t\right] = 1$, $\forall t \geqslant 0$.

B. *Lorsque* $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty\right] < \infty$*, alors* M *martingale u.i.*[1] *et* $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}M_\infty\right] < \infty$.

a) Justifier l'existence de la limite p.s. $\mathcal{E}(M)_\infty$ (on pourra utiliser le résultat du point **A.b)**). En déduire que $\mathrm{E}\left[\mathcal{E}(M)_\infty\right] \leqslant 1$.

b) Montrer que $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty\right] < \infty$ implique M (vraie) martingale bornée dans L^2, donc u.i.

c) Calculer $\mathcal{E}(M)_\infty^{1/2}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty\right]^{1/2}$. Déduire que $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty\right] < \infty$ implique $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}M_\infty\right] < \infty$.

C. *Étude de* $\mathcal{E}(B)$*, avec* B *un mouvement brownien réel issu de 0.*

a) Pour $a > 0$ on introduit $\sigma_a := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \leqslant t - a\}$. Justifier que σ_a est un temps d'arrêt pour la filtration brownienne $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\geqslant 0}$. Que vaut B_{σ_a} ? Montrer que $\sigma_a \uparrow \infty$ p.s., quand $a \uparrow \infty$.

b) Pour $\lambda > 0$ on pose $u(t,x) := e^{-\lambda t} e^{-(\sqrt{1+2\lambda}-1)x}$. Montrer que u vérifie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t u(t,x) = -\frac{1}{2}\,\partial_{xx}^2 u(t,x) + \partial_x u(t,x).$$

Calculer ensuite $u(t, B_t - t)$.

c) Montrer que $t \mapsto u(t\wedge\sigma_a, B_{t\wedge\sigma_a} - t\wedge\sigma_a)$ est une $\{\mathcal{F}_t^B\}$-martingale. En déduire que $\mathrm{E}[u(\sigma_a, B_{\sigma_a} - \sigma_a)] = 1$. Trouver l'expression de la transformée de Laplace $\lambda \mapsto \mathrm{E}[e^{-\lambda\sigma_a}]$.

d) En déduire que $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\sigma_a\right] = e^a < \infty$ et que $\mathcal{E}(B)_{\sigma_a} \in \mathrm{L}^1$. Que vaut $\mathrm{E}\left[\mathcal{E}(B)_{\sigma_a}\right]$?

e) Soit $N_t := \mathcal{E}(B)_{\sigma_a\wedge t}$. Montrer que $\{N_t, \mathcal{F}_t^B\}_{t\geqslant 0}$ est une martingale u.i. (on pourra montrer que N est une martingale fermée). En déduire que pour tout $\{\mathcal{F}_t^B\}$-temps d'arrêt T, $\mathrm{E}\left[\mathcal{E}(B)_{T\wedge\sigma_a}\right] = 1$.

D. *Lorsque* $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right] < \infty$, $\forall t \geqslant 0$, *alors* $\mathcal{E}(M)$ *est une (vraie) martingale.*

a) Pour chaque $s \geqslant 0$ on pose $\tau_s = \inf\{u \geqslant 0 : \langle M\rangle_u > s\}$ et on note $\mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{\tau_s}$. Montrer que, pour $t \geqslant 0$ arbitraire fixé, $\langle M\rangle_t$ est un temps d'arrêt pour la filtration $\{\mathcal{G}_s\}_{s\geqslant 0}$. Donner la relation entre M et un mouvement brownien standard[2].

Tournez la page S.V.P.

[1] uniformément intégrable

[2] éventuellement sur un espace de probabilité filtré grossi

b) Soit $t \geqslant 0$ arbitraire fixé. Utiliser le résultat du point **C.e)** pour justifier l'égalité suivante :
$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{\sigma_a \leqslant \langle M\rangle_t\}} \exp(-a + \frac{1}{2}\sigma_a)\right] + \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{\sigma_a > \langle M\rangle_t\}} \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)\right] = 1,$$
où σ_a est le temps d'arrêt associé au mouvement brownien obtenu au point précédent **D.a)**. Calculer les limites, quand $a \uparrow \infty$, des deux termes du membre de gauche de l'égalité. Justifier les deux convergences en soulignant l'importance de l'hypothèse $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right] < \infty$.

c) En déduire que $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right] < \infty$, $\forall t \geqslant 0$, implique $\mathcal{E}(M)$ une (vraie) martingale.

E. *Si M (vraie) martingale u.i. et* $\mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}M_\infty\right] < \infty$, *alors $\mathcal{E}(M)$ (vraie) martingale.*

a) Justifier que $M_t = \mathrm{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]$ et que $\exp(\frac{1}{2}M_t) \leqslant \mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}M_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]$. En déduire que $\{\exp(\frac{1}{2}M_t), \mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ est une sousmartingale fermée.

b) Montrer que la famille $\left\{\exp(\frac{1}{2}M_T) : T \text{ temps d'arrêt}\right\}$ est u.i. (on pourra utiliser le théorème d'arrêt pour les sousmartingales fermées).

c) Pour $0 < \gamma < 1$ on pose $X_t^{(\gamma)} := \exp\left(\frac{\gamma M_t}{1+\gamma}\right)$. Exprimer $[\mathcal{E}(M)_t]^{\gamma^2}\left[X_t^{(\gamma)}\right]^{1-\gamma^2}$ à l'aide de γM. En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et pour tout temps d'arrêt T :
$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_A\, \mathcal{E}(\gamma M)_T\right] \leqslant \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_A \exp \frac{1}{2}M_T\right]^{2\gamma(1-\gamma)}$$
(on pourra utiliser l'inégalité de Hölder).

d) Déduire que la famille $\{\mathcal{E}(\gamma M)_T : T \text{ temps d'arrêt}\}$ est u.i. (on pourra utiliser le point **E. b)**) et ensuite que $\mathcal{E}(\gamma M)$ est une (vraie) martingale u.i.

e) Justifier les inégalités suivantes :
$$1 = \mathrm{E}\left[\mathcal{E}(\gamma M)_\infty\right] \leqslant \mathrm{E}\left[\mathcal{E}(M)_\infty\right]^{\gamma^2} \mathrm{E}\left[X_\infty^{(\gamma)}\right]^{1-\gamma^2} \leqslant \mathrm{E}\left[\mathcal{E}(M)_\infty\right]^{\gamma^2} \mathrm{E}\left[\exp \frac{1}{2}M_\infty\right]^{2\gamma(1-\gamma)}.$$
Déduire que $\mathrm{E}\left[\mathcal{E}(M)_\infty\right] = 1$ (on pourra faire $\gamma \uparrow 1$). Conclure que $\mathcal{E}(M)$ est une martingale.

F. *Énoncer le résultat obtenu en combinant les points* **B** *et* **E**. *Comparer avec le résultat du point* **D.**

G. *Polynômes de Hermite et intégrales stochastiques multiples, martingales locales et une inégalité.*

a) Pour $(u, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on introduit les polynômes $H_n(u, x)$ par l'identité
$$\sum_{n\geqslant 0} \gamma^n H_n(u, x) = \exp(\gamma x - \frac{1}{2}\gamma^2 u),\ \gamma \in \mathbb{R}_+.$$
Calculer $H_n(u, x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Montrer que :
$$\partial_x H_n(u, x) = H_{n-1}(u, x) \quad \text{et} \quad \partial_u H_n(u, x) = -\frac{1}{2}\partial^2_{xx} H_n(u, x).$$
On admettra que si $u \leqslant R$ et $|x| \leqslant R$, avec $R \in \mathbb{N}^*$, alors $|H_n(u, x)| \leqslant R^n$ $(n \geqslant 0)$.

b) Pour $n \geqslant 0$ on pose $\mathcal{Z}_n(t) := H_n(\langle M\rangle_t, M_t)$. Exprimer $\mathcal{E}(\gamma M)_t$ à l'aide des $\mathcal{Z}_n(t)$.

c) Pour $R \in \mathbb{N}^*$ on note $T_R := \inf\{t \geqslant 0 : \langle M\rangle_t + |M_t| > R\}$. Montrer que pour $0 < \gamma < 1/R$:
$$\mathcal{E}(\gamma M)_{t\wedge T_R} = 1 + \sum_{n\geqslant 0} \gamma^{n+1} \int_0^{t\wedge T_R} \mathcal{Z}_n(s)\, dM_s$$
(on pourra utiliser les points **A.a)**, **G.b)**, ainsi que la majoration $|\mathcal{Z}_n(t)| \leqslant R^n$, pour $t \in [0, T_R]$).

d) En déduire que $\mathcal{Z}_0(t) \equiv 1$ et que, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{Z}_n(t) = \int_0^t \mathcal{Z}_{n-1}(s)\, dM_s$.
Peut-on retrouver cette dernière égalité par une application directe de la formule d'Itô ?
Que vaut l'intégrale multiple itérée $\int_0^t dM_{t_1} \int_0^{t_1} dM_{t_2} \ldots \int_0^{t_{n-1}} dM_{t_n}$ $(n \geqslant 1)$?

Tournez la page S.V.P.

e) Montrer que $n\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n-1}\, M - \mathcal{Z}_{n-2}\,\langle M\rangle$, $n \geqslant 2$ (on pourra utiliser la définition de $H_n(u,x)$).

f) Justifier que les processus suivants sont des martingales locales continues :

$$M_t, \quad M_t^2 - \langle M\rangle_t, \quad M_t^3 - 3M_t\langle M\rangle_t, \quad M_t^4 - 6M_t^2\langle M\rangle_t + 3\langle M\rangle_t^2, \quad \ldots$$

et les exprimer avec des intégrales stochastiques multiples. Quel est le terme suivant de la suite ?

g) Supposons dans ce point que M est une (vraie) martingale bornée issue de 0. Montrer que :

$$\mathrm{E}\left[M_t^4\right] + 3\mathrm{E}\left[\langle M\rangle_t^2\right] \leqslant 6\,\mathrm{E}\left[M_t^4\right]^{1/2}\mathrm{E}\left[\langle M\rangle_t^2\right]^{1/2}, \ \forall t \geqslant 0.$$

On note $M_t^* = \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|$. Montrer que : $\mathrm{E}\left[(M_t^*)^4\right] \leqslant (4/3)^4\,\mathrm{E}\left[M_t^4\right]$, pour tout $t \geqslant 0$.

h) En déduire que pour toute martingale locale continue M issue de 0 :

$$\mathrm{E}\left[(M_\infty^*)^4\right] \leqslant 361\,\mathrm{E}\left[\langle M\rangle_\infty^2\right].$$

(on pourra d'abord supposer que M est une (vraie) martingale bornée et ensuite utiliser la suite de temps d'arrêt $\{T_R\}_{R\in\mathbb{N}^*}$). Comparer ce résultat à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

i) Avec le notations du point **C.a)**, montrer que $\mathrm{E}\left[H_n(\sigma_a, B_{\sigma_a})\right] = 0$ $(n \geqslant 1)$. En déduire la transformée de Laplace $\lambda \mapsto \mathrm{E}[e^{-\lambda\sigma_a}]$. Comparer avec le résultat de **C.c)**.