UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master et Magistère 1ère année
Année 2008/2009

Probabilités de base : examen de rattrapage

lundi 22 juin 2009 - durée 2 heures - résumé autorisé

Exercice I.

Un point aléatoire (X, Y) est unifomément distribué dans le carré $\mathcal{R}$ de sommets de coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, donc sa densité est de la forme $f(x, y) = c\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x, y)$. Déterminer la constante c et les lois marginales des coordonnées X et Y (on pourra faire un dessin). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? corrélées ?

Exercice II.

Un couple aléatoire (X, Y) est de loi discrète

$$\mathrm{P}((X,Y) = (n,m)) = \frac{c}{(n+m-1)(n+m)(n+m+1)}, \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots$$

Calculer les lois marginales de X et Y. En déduire la valeur de la constante c. On pourra chercher à exprimer la quantité $\mathrm{P}((X, Y) = (n, m))$ comme une somme télescopique. Que valent $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Trouver la loi de $X + Y$.

Exercice III.

Soit $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy. Trouver la loi de la variable aléatoire $T = \frac{1}{n}(Z_1 + \ldots + Z_n)$. Pourquoi le résultat obtenu ne contredit pas la loi des grands nombres ?

Exercice IV.

Au lancer d'une pièce, pile sort avec probabilité $p \in (0, 1)$. On note A_n le nombre de pile et B_n le nombre de face lors de n lancers répétés de cette pièce. Que valent $A_n + B_n$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n}$? Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(2p - 1 - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}(A_n - B_n) \leqslant 2p - 1 + \varepsilon)$ (ici $\varepsilon > 0$ est fixé).

Exercice V.

On note φ la fonction caractéristique de la loi commune de deux variables aléatoires indépendantes W_1, W_2. Supposons que les variables W_1 et W_2 sont centrées et de variance 1.

1. Montrer que si la loi commune est $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\frac{W_1+W_2}{\sqrt{2}} \sim W_1 \sim W_2$.
2. On ne suppose plus connue la loi commune, mais que $\frac{W_1+W_2}{\sqrt{2}} \sim W_1 \sim W_2$.
   a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\frac{t}{\sqrt{2}})^2 = \varphi(t)$. Que vaut $\varphi(\frac{t}{2})^4$?
   b) En déduire que, si W_3, W_4 sont encore deux variables aléatoires indépendantes, de même loi que W_1, W_2 et indépendantes de W_1, W_2, alors $\dfrac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{2} \sim W_1 \sim W_2 \sim W_3 \sim W_4$.
   c) On considère $\{W_1, W_2, W_3, \ldots\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $S_n = W_1 + \ldots + W_n$. Pour $n \geqslant 1$ entier, trouver la loi de la variable aléatoire $\dfrac{S_{2^n}}{\sqrt{2^n}}$ et en déduire sa limite en loi, lorsque $n \to \infty$.
   d) En déduire une phrase réciproque à celle du point 1.