UFR Mathématiques | Master 2ème année Recherche
Université de Rennes 1 | Année 2010/2011

Grandes déviations et applications : contrôle continu

lundi 14 mars 2011 - durée 3 heures - documents de cours autorisés

Exercice I.

Soit $(w_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathrm{P})$. Considérons le processus continu adapté $(x_t)_{t\in[0,1]}$ tel que

$$x_t = w_t - \int_0^t x_s ds, \quad t \in [0,1].$$

Notons $E = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$, $\mu = \mathrm{P} \circ x_\bullet^{-1}$ la loi de $x_\bullet$ et, pour $\varepsilon > 0$, μ_ε la loi de $x_\bullet^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} x_\bullet$.

1. Montrer que la famille $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations de trois manières et indiquer à chaque fois comment obtenir la fonctionnelle de taux I :
   (a) utiliser le théorème de Donsker-Varadhan en montrant d'abord que μ est une mesure gaussienne centrée sur E de covariance $C(\lambda, \eta) = \int_{[0,1]^2} \kappa(s,t)\lambda(ds)\eta(dt)$, $\lambda, \eta \in E^\star$, où $\kappa(s,t) := (e^{-|s-t|} - e^{-(s+t)})/2$; on pourra introduire l'application $S : H \to E$ donnée par $S(f)(t) := \int_0^t e^{-(t-s)} f(s) ds$, $t \in [0,1]$, avec $H = \mathrm{L}^2([0,1], \mathbb{R})$;
   (b) utiliser le théorème de Schilder ainsi que l'égalité $x_\bullet^{(\varepsilon)} = F(\sqrt{\varepsilon} w_\bullet)$, où $F : E \to E$ est telle que $F(g)(t) = g(t) - \int_0^t F(g)(s) ds$, $t \in [0,1]$;
   (c) utiliser le théorème de Freidlin-Wentzell.
2. On note $Z = (\int_0^1 x_t^2 dt)^{1/2}$. On note ν_ε la loi de la variable aléatoire $\sqrt{\varepsilon} Z$. Montrer que la famille $\{\nu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $\mathbb{R}$ et indiquer la fonction de taux J. Vérifier que cette fonction de taux est de classe C^∞ sur $(0, \infty)$.

Exercice II.

Soit $(E, \mathcal{B}(E))$ un espace métrique polonais muni de sa tribu borélienne. Considérons $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités exponentiellement tendue et supposons que la limite suivante existe :

$$\Lambda_F := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_E e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon, \quad \forall F \in \mathrm{C_b}(E; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Notons $I(x) := \sup_{F\in \mathrm{C_b}(E;\mathbb{R})}\{F(x) - \Lambda_F\}$.

1. Montrer que I est une fonctionnelle d'action et que $I \geqslant 0$.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et pour tout $x \in E$, il existe un voisinage $U_x^{(\delta)}$ de x tel que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon \left(U_x^{(\delta)}\right) \leqslant -I(x) + \delta$. En déduire la majoration du principe de grandes déviations pour tout compact $K \subset\subset E$.
3. Soient $O \subset E$ un ouvert quelconque et $x \in O$. Considérons $G : E \to [0,1]$ une fonction continue telle que $G(x) = 1$ et $G(y) = 0$ pour tout $y \in O^c$ et on pose $G_n(z) := n(G(z) - 1)$, $z \in E$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $-I(x) \leqslant \Lambda_{G_n} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(O) \vee (-n)$. En déduire la minoration du principe de grandes déviations pour O.
4. Énoncer le résultat obtenu aux points 1-3 et déduire que

$$\Lambda_F = \sup_{x\in E}\{F(x) - I(x)\}, \quad \forall F \in \mathrm{C_b}(E; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Tournez la page S.V.P.

5. On remplace l'hypothèse de tension exponentielle de la famille $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ par le fait que la famille $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec une certaine fonctionnelle de taux I supposée bonne. Pourquoi la limite (1) existe et satisfait (2) ?
6. Dans ce point on continue à ne pas faire l'hypothèse de tension exponentielle de la famille $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Supposons, en revanche, que la famille $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est telle que la limite (1) existe et satisfait (2) avec I une bonne fonctionnelle de taux.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$ et pour toute $F \in \mathrm{C_b}(E;\mathbb{R})$, $-I(x) \leqslant \Lambda_F - F(x)$. En déduire la minoration d'un principe de grandes déviations pour $\{P^\varepsilon\}$.
   (b) On fixe $C \subset E$ un fermé et on suppose que $\inf_{x\in C} I(x) > 0$. Pour $\delta > 0$ assez petit on note $\ell_\delta := \inf_{x\in C}(I(x) - \delta) \in (0,\infty)$. Montrer que $K_{\ell_\delta} := \{x : I(x) \leqslant \ell_\delta\} \neq \emptyset$ et que $C \cap K_{\ell_\delta} = \emptyset$.
   (c) Soit $y \in K_{\ell_\delta}$ quelconque et considérons une fonction continue $G_y : E \to [0,1]$ telle que $G_y(y) = 1$ et $G_y(x) = 0$, pour tout $x \in C$. Montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et $y_1, \ldots, y_r \in K_{\ell_\delta}$ tel que $K_{\ell_\delta} \subset U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_r}$, où $U_y := \{z \in E : G_y(z) > 1/2\}$.
   (d) Si on note, pour $k \geqslant 1$ entier, $F_k(z) := 2k \max_{1\leqslant j\leqslant r} G_{y_j}(z)$, montrer que $F_k \in \mathrm{C_b}(E;\mathbb{R})$ et que $F_k(x) = 0$, pour tout $x \in C$. Prouver que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(C) \leqslant \Lambda_{-F_k} \leqslant -\ell_\delta$. On pourra obtenir la deuxième inégalité pour un choix judicieux de l'entier k. Déduire la majoration du principe de grandes déviations pour C.
   (e) Énoncer le résultat obtenu.

Exercice III.

1. Soit $\{N_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières strictement positives. Supposons que la limite suivante existe $\Lambda_N(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{E}(e^{\lambda N_n}) \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et supposons que la fonction Λ_N est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\Lambda_N^\star$ la transformée de Legendre de Λ_N.
   (a) Montrer que lorsque, en particulier, $N_n \equiv n$ ou $N_n - 1 \sim \mathcal{P}(n)$ l'hypothèse précédente est satisfaite. Calculer $\Lambda_N^\star$ dans ces deux cas particuliers.
   (b) Montrer que $\Lambda_N^\star(x) = +\infty$, si $x < 0$ et que $\Lambda_N(\lambda) := \sup_{x\geqslant 0}\{\lambda x - \Lambda_N^\star(x)\}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. Soit une autre suite $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendantes, de même loi μ et indépendantes de la suite $\{N_n\}_{n\geqslant 1}$. On suppose que $\Lambda_X(u) := \log \mathrm{E}(e^{u\cdot X_1}) < \infty$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Pour $n \geqslant 1$, introduisons $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N_n} X_j$ et notons P_n la loi de Z_n.
   (a) Montrer que la transformée de log-Laplace de P_n est $\Lambda_N(\Lambda_X(\cdot))$.
   (b) Montrer que la famille $\{P_n\}$ satisfait un principe de grandes déviations et trouver la fonction de taux I. Expliciter I pour les deux cas particuliers précédents.
3. Considérons $T_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N_n} \delta_{X_j}$, $n \geqslant 1$, variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des mesures finies positives sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et notons Q_n la loi de T_n. On munit $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ de la topologie de la convergence étroite et on note $\langle \varphi, \nu\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\nu$, pour $\nu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions boréliennes bornées.
   (a) Montrer l'existence de la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{E}[\exp(n\langle\varphi, T_n\rangle)] = \Lambda_N(\log\langle e^\varphi, \mu\rangle) =: \Lambda(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

(b) Montrer que la famille $\{Q_n\}$ satisfait un principe de grandes déviations de fonctionnelle de taux $\Lambda^\star(\nu) := \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})}\{\langle \varphi, \nu\rangle - \Lambda(\varphi)\}$.

(c) Notons $H(\cdot|\mu)$ l'entropie relative par rapport à μ. Montrer que la fonctionnelle J définie par $J(0) := \Lambda_N^\star(0)$ et

$$J(\nu) := \begin{cases} \nu(\mathbb{R}^d)H(\frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}|\mu) + \Lambda_N^\star(\nu(\mathbb{R}^d)), & \text{si } \nu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d),\ \nu \neq 0 \\ +\infty, & \text{si } \nu \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})^\star \setminus \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

est une fonctionnelle de taux. On pourra montrer que, si $\nu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, $\nu \neq 0$, alors

$$\nu(\mathbb{R}^d)H(\frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}|\mu) = \sup_{\varphi \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})}\{\langle \varphi, \nu\rangle - \nu(\mathbb{R}^d)\log\langle e^\varphi, \mu\rangle\}.$$

Expliciter J pour les deux cas particuliers de 1(a).

(d) Soit $\varphi \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ et on pose $g := \frac{e^\varphi}{\langle e^\varphi, \mu\rangle}$. Vérifier que $\log\langle e^\varphi, \mu\rangle = \langle \varphi g, \mu\rangle - \langle g\log g, \mu\rangle$ et utiliser cette égalité pour prouver que

$$\Lambda(\varphi) \leqslant \sup_{\psi \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}), \psi \geqslant 0}\{\langle \psi\varphi, \mu\rangle - \langle \psi \log \psi, \mu\rangle + \langle \psi, \mu\rangle \log\langle \psi, \mu\rangle - \Lambda_N^\star(\langle \psi, \mu\rangle)\}.$$

En déduire que $\Lambda(\varphi) \leqslant \sup_{\nu \in \mathrm{B}_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})^\star}\{\langle \varphi, \nu\rangle - J(\nu)\}$.

(e) Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ et ν telle que $d\nu = f\,d\mu$ on a

$$\log\langle e^\varphi, \mu\rangle \geqslant \langle \varphi, \frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}\rangle - H(\frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}|\mu).$$

(f) Montrer que $\Lambda_N(\log\langle e^\varphi, \mu\rangle) \geqslant \sup\{\langle \varphi, \nu\rangle - J(\nu) : \nu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d), \nu \neq 0, \nu << \mu\}$.

(g) Déduire que $\Lambda^\star = J$ et énoncer le résultat obtenu.