UFR Mathématiques
Université de Rennes 1

Master 2ème année Recherche
Année 2009/2010

Grandes déviations et applications : examen

vendredi 26 mars 2010 - durée 3 heures - documents de cours autorisés

Exercice I.

On munit l'espace vectoriel $E := \{w \in \mathrm{C}([0,\infty);\mathbb{R}) : w(0) = 0,\ \lim_{t\to\infty} \frac{|w(t)|}{t} = 0\}$ de la norme $\|w\| := \sup_{t\geqslant 0} \frac{|w(t)|}{1+t}$. E est un espace de Banach séparable avec le dual $E^\star$ l'espace des mesures de Borel λ sur $[0,\infty)$ telles que $\lambda(\{0\}) = 0$ et $\int_0^\infty (1+t)|\lambda|(dt) < \infty$ ($|\lambda|$ étant la variation de λ). La dualité entre E et $E^\star$ est donnée par $\langle \lambda, w\rangle := \int_0^\infty w(t)\lambda(dt)$. Soit $\mathcal{W}$ l'unique mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{B}(E))$ telle que $\displaystyle\int_E \exp[i\langle\lambda, w\rangle]\mathcal{W}(dw) = \exp[-\Lambda(\lambda)]$, où $\displaystyle\Lambda(\lambda) := \frac{1}{2}\iint_{[0,\infty)^2} (s\wedge t)\lambda(ds)\lambda(dt)$. On note $\Lambda^\star(w) := \sup\limits_{\lambda\in E^\star} \{\langle\lambda, w\rangle - \Lambda(\lambda)\}$. Pour $\varepsilon > 0$ soit $\mathcal{W}_\varepsilon$ la loi sous $\mathcal{W}$ de l'application $w \mapsto \sqrt{\varepsilon}w$.

1. Soit $\lambda \in E^\star$ et on pose $z_\lambda(t) := \int_0^t \lambda((s,\infty))ds$, pour $t \geqslant 0$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\iint_{[0,\infty)^2} (s\wedge t)\lambda(ds)\lambda(dt) = \int_0^\infty |\lambda((s,\infty))|^2 ds$, pour $\lambda \in E^\star$.
   (On pourra d'abord supposer λ à support compact et sans atomes.)
   En déduire que $\displaystyle\iint_{[0,\infty)^2} (s\wedge t)\lambda(ds)\nu(dt) = \int_0^\infty \lambda((s,\infty))\nu((s,\infty))ds = \langle\nu, z_\lambda\rangle$, pour $\nu \in E^\star$ et que $\Lambda(\lambda) = \frac{1}{2}\langle\lambda, z_\lambda\rangle$.
   (b) On note H^1 l'espace des fonctions $w \in E$ ayant la propriété que $w(t) = \int_0^t \dot{w}(s)ds$, $t \geqslant 0$, pour une certaine fonction $\dot{w} \in \mathrm{L}^2([0,\infty);\mathbb{R})$. Pour $w \in H^1$ on pose $\|w\|_{H^1} := \|\dot{w}\|_{\mathrm{L}^2}$. Montrer que si $w \in H^1$, alors $\Lambda^\star(w) = \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1}$.
   (c) Soit $w \in E$ telle que $\Lambda^\star(w) < \infty$. Utiliser le théorème de Riesz pour montrer qu'il existe une unique $\dot{w} \in \mathrm{L}^2([0,\infty);\mathbb{R})$ telle que, pour toute $z \in \mathrm{C}_c^\infty([0,\infty);\mathbb{R})$ $\displaystyle-\int_0^\infty w(t)\dot{z}(t)dt = \int_0^\infty \dot{w}(t)z(t)dt$. En déduire que $w \in H^1$. Exprimer $\Lambda^\star$.
   (d) Déduire que $\Lambda^\star(z_\lambda) = \Lambda(\lambda)$ pour $\lambda \in E^\star$ et que $\Lambda^\star$ est une bonne fonctionnelle de taux. *(On pourra vérifier que les ensembles bornés de H^1 sont relativement compacts dans E).*
2. On fixe $w \in E$. Montrer que pour chaque $\delta > 0$ il existe un $r > 0$ tel que, la boule centrée en w de rayon r, $B(w,r)$ satisfait
$$\mathcal{W}_\varepsilon\left(\overline{B(w,r)}\right) \leqslant \begin{cases} \exp[-\frac{1}{(\varepsilon\delta)}] & \text{si } \Lambda^\star(w) = \infty \\ \exp[-\frac{(\Lambda^\star(w)-\delta)}{\varepsilon}] & \text{si } \Lambda^\star(w) < \infty. \end{cases}$$
   (On pourra utiliser l'inégalité de Markov et bien choisir les valeurs de r.)
   En déduire que pour tout compact $K \subset E$, $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathcal{W}_\varepsilon(K) \leqslant -\inf\limits_{w\in K} \Lambda^\star(w)$.
3. (a) Soit $\lambda \in E^\star$ et on note $\mathcal{W}^\lambda$ la loi de $w \mapsto w + z_\lambda$ sous $\mathcal{W}$. Montrer que $\mathcal{W}^\lambda \ll \mathcal{W}$ et que $\displaystyle\frac{d\mathcal{W}^\lambda}{d\mathcal{W}}(w) = \exp[\langle\lambda, w\rangle - \Lambda(\lambda)] =: G_\lambda(w)$.
   (On pourra calculer la transformée de Laplace de la probabilité $P(dw) := \frac{1}{G_\lambda(w)}\mathcal{W}^\lambda(dw)$ et ensuite montrer que P coïncide avec $\mathcal{W}$.)
   (b) Soient $O \subset E$ un ouvert et $z \in O \cap \mathrm{C}_c^\infty([0,\infty);\mathbb{R})$. On associe à une telle fonction la mesure donnée par $\lambda_z((t,\infty)) := \dot{z}(t)$, $t \geqslant 0$. Montrer que, pour $\delta > 0$, $\mathcal{W}_\varepsilon(B(z,\delta)) = \mathcal{W}^{-\lambda_z/\sqrt{\varepsilon}}(B(0, \delta/\sqrt{\varepsilon}))$. En déduire que $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathcal{W}_\varepsilon(O) \geqslant -\Lambda^\star(z)$, pour tout $z \in O \cap \mathrm{C}_c^\infty([0,\infty);\mathbb{R})$. Etendre cette inégalité pour tout $z \in O$.

Tournez la page S.V.P.

(c) Montrer que pour tout ouvert $O \subset E$, $\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathcal{W}_\varepsilon(O) \geqslant - \inf_{w \in O} \Lambda^\star(w)$.

4. Pour $w \in E$ on pose $N(w) := \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2^k} \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant k} \frac{|w(t) - w(s)|}{|t-s|^{1/4}} + \sup_{t \geqslant 1} \frac{|w(t)|}{t^{3/4}}$.

   Vérifier que $N : E \to [0, \infty]$ est sous-additive et que $N(aw) = |a| N(w)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\ell > 0$, $\{w \in E : N(w) \leqslant \ell\}$ est un compact de E, en utilisant le critère de Ascoli-Arzelà et un procédé de diagonalisation.

5. On admet que $\mathcal{W}(\{w : N(w) < \infty\}) = 1$. En suivant les pas de la démonstration du théorème de Fernique, montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $\int_E \exp[\alpha\, N(w)^2] \mathcal{W}(dw) < \infty$.

   Bonus : justifier (au moins heuristiquement) que $\int_E N(w)^8 \mathcal{W}(dw) < \infty$, d'où l'égalité admise.

6. Pour $\ell > 0$ on note $K_\ell := \{w \in E : \alpha N(w)^2 \leqslant \ell\}$. Montrer que $\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathcal{W}_\varepsilon(K_\ell^c) \leqslant -\ell$.

7. Déduire que $\{\mathcal{W}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ satisfait un principe de grandes déviations de fonctionnelle de taux $\Lambda^\star$.

Exercice II.

Soient $\{\mathrm{P}_n\}_{n \geqslant 1}$ et $\{\mathrm{Q}_n\}_{n \geqslant 1}$ deux suites de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement. On suppose que ces suites satisfont chacune un principe de grandes déviations avec bonnes fonctionnelles de taux I et J respectivement.

1. Montrer que les suites $\{\mathrm{P}_n\}_{n \geqslant 1}$ et $\{\mathrm{Q}_n\}_{n \geqslant 1}$ sont exponentiellement tendues. En déduire que la suite de probabilités $\{\mathrm{P}_n \otimes \mathrm{Q}_n\}_{n \geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}^{d+k}$ est exponentiellement tendue.

2. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ on note $I(A) := \inf_{x \in A} I(x)$ et $J(B) := \inf_{y \in B} J(y)$. On pose

$$L(x, y) := \sup\{I(A) + J(B) : A, B \text{ ouverts et } (x, y) \in A \times B\}.$$

   Montrer que $L(x, y) = I(x) + J(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{d+k}$. En déduire que L est une bonnne fonctionnelle de taux.

3. Montrer que la suite de probabilités $\{\mathrm{P}_n \otimes \mathrm{Q}_n\}_{n \geqslant 1}$ satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonctionnelle de taux L.

4. Soient X_n et Y_n vecteurs aléatoires de lois P_n et Q_n respectivement. On note $Z_n := F(X_n, Y_n)$, où $F : \mathbb{R}^{d+k} \to \mathbb{R}^r$ est une fonction continue, et soit μ_n la loi de Z_n. Montrer que la suite $\{\mu_n\}_{n \geqslant 1}$ satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonctionnelle d'action $\mathcal{I}$ que l'on déterminera.

5. On suppose que $d = k = 1$, que $F(x, y) = x + y$ et que I et J sont des fonctions convexes.
   (a) Montrer que $\mathcal{I}$ est une fonction convexe.
   (b) On note $\Lambda_{\mathrm{P}_n}(\lambda) := \log \mathrm{E}[e^{\lambda X_n}]$, $\Lambda_{\mathrm{Q}_n}(\lambda) := \log \mathrm{E}[e^{\lambda Y_n}]$ et $\Lambda_{\mu_n}(\lambda) := \log \mathrm{E}[e^{\lambda Z_n}]$ et on suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ existent $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \Lambda_{\mathrm{P}_n}(n\lambda) < \infty$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \Lambda_{\mathrm{Q}_n}(n\lambda) < \infty$. Étudier l'existence de la limite $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \Lambda_{\mu_n}(n\lambda)$. En déduire que $\mathcal{I}$ est la transformée de Legendre d'une fonction que l'on précisera.

6. Soit $c > 0$ et G_1, G_2 deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère

$$V_n := \frac{1}{2n} \left[G_1^2 - (G_2 + \sqrt{2cn})^2 \right], \quad n \geqslant 1.$$

   (a) Montrer que la suite des lois de $\{\frac{G_1^2}{2n}\}_{n \geqslant 1}$ satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonctionnelle de taux que l'on calculera.
   (b) Montrer que la suite des lois de $\{V_n\}_{n \geqslant 1}$ satisfait un principe de grandes déviations et calculer la fonctionnelle de taux. Est-elle bonne ? Est-elle une transformée de Legendre ?