Licence de Mathématiques 2000-2001

Probabilités

2. Espérance des variables aléatoires

2.1. Calculer l'espérance, la variance, la fonction caractéristique et éventuellement la fonction génératrice et la fonction génératrice des moments pour les lois de probabilités usuelles.

2.2. Deux joueurs A et B jouent à un jeu d'argent. A gagne avec probabilité p, $0 < p < 1$, et il mise une somme de s, tandis que B gagne avec une probabilité $1-p$, en misant une somme s'. Le vainqueur empoche le total des enjeux. Trouver une condition portant sur p,s,s' pour que le jeu soit équitable.

2.3. Calculer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique des variables aléatoires décrites dans les exercices **1.20**, **1.21**, **1.23**, **1.24**, **1.25**, **1.28**, **1.33**, **1.34**.

2.4. Une urne contient r boules dont 2 rouges et $r-2$ noires. On effectue r tirages sans remise et on note X le rang du premier tirage d'une boule rouge et Y le rang du second tirage.
(i) Trouver la loi de (X,Y) et de ses marginales.
(ii) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

2.5. **(i)** Une personne a n clés dans sa poche et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle prend au hasard les clés les unes après les autres et les essaye. On note X le nombre de clés qu'elle essaye avant de trouver la bonne. En supposant qu'une clé une fois essayée est ensuite mise de côté, quelle est la probabilité que cette personne tire la bonne clé à la k-ème tentative? Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance?
(ii) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait ces boules de l'urne les unes après les autres, au hasard et sans remise, et on note R_k le numéro porté par la k-ème boule tirée de l'urne. Donner la loi de R_k, son espérance et sa variance.
(iii) On note $W_N = R_1 + \ldots + R_N$. Calculer l'espérance de W_N. Trouver la loi du couple (R_j,R_k), $j \neq k$, et montrer qu'elle ne dépend pas de (j,k). Calculer $\mathrm{E}(W_N^2)$, $\mathrm{E}(R_jR_k)$, puis la variance de W_N.

2.6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X décrite dans l'exercice **1.23** **(i)** en remarquant que

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(\xi = k) + \frac{3}{4}\mathrm{P}(\eta = k), \forall k \in \mathbb{N},$$

où $\eta = \zeta + 1$ et où ξ et ζ sont deux variables de loi $\mathcal{P}(2)$.

2.7. Soit Y une variable aléatoire uniforme sur $\{a,a+1,\ldots,b\}$. A partir des expressions de l'espérance et de la variance de la loi $\mathcal{U}(1,2,\ldots,r)$ déduire $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

2.8. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(i) On note $Y = \inf\{X,n\}$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.
(ii) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire succesivement et avec remise à chaque fois une boule de l'urne et on cesse les tirages dès qu'une boule rouge est sortie. On désigne par X le nombre de boules noires obtenues pendant l'expérience. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et

$\mathrm{Var}(X)$.

2.9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X. Soit ϕ une fonction positive, croissante de classe C^1 sur $[0,\infty[$, nulle en 0.
(i) Montrer que

$$\mathrm{E}(\phi(X)) = \int_0^\infty \phi'(t)(1 - F_X(t))dt.$$

(ii) On suppose que $\phi(X)$ est intégrable. Montrer que

$$\lim_{t\uparrow\infty} \phi(t)\mathrm{P}(X > t) = 0.$$

Cas particulier $\phi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2.10. Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = c\left[x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2 - x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x)\right].$$

Calculer c, $\mu_n(X)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2.11. **(i)** Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ d'espérance $\mathrm{E}(X)$ et de matrice de covariance K_X. Soit A une matrice $p \times d$ et $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que

$$\mathrm{E}(u + AX) = u + A\mathrm{E}(X), K_{u+AX} = AKA^*.$$

(ii) Soit le couple aléatoire (X,Y) d'espérance $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que la matrice K est semi-définie positive et ensite calculer l'espérance et la matrice de covariance de $(X + 1,X - Y,X + Y)$.

2.12. On a étudié la glycémie des individus et on a observé qu'elle suit la loi normale. Sur un échantillon de 300 individus on a constaté que 20% des glycémies sont inférieures à $0{,}82 g/l$ et que 30% des glycémies sont supérieures à $0{,}98 g/l$. Déterminer la glycémie moyenne et l'écart-type par rapport à cette moyenne de la glycémie d'un individu.

2.13. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on note $Y = X^2$. Trouver la loi de Y et calculer son espérance.

2.14. On pose

$$f(x,y) = \frac{c}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(3x^2 - 3xy + y^2)\right].$$

(i) Déterminer c pour que f soit la densité d'un couple aléatoire (X,Y).
(ii) Trouver les lois marginales et calculer le vecteur espérance et la matrice de covariance de (X,Y).

2.15. **(i)** Soit $X \sim \gamma(p,\lambda)$. Montrer que $X \in \mathrm{L}^r$, pour $1 \leqslant r < \infty$, mais que $X \notin \mathrm{L}^\infty$.

Mêmes questions pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(ii) Soit Y une variable aléatoire de densité

$$f_Y(x) = \frac{p}{x^{p+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x), p \geqslant 1.$$

Montrer que $Y \in \mathrm{L}^r$, pour $r < p$ et que $Y \notin \mathrm{L}^p$.
(iii) Construire une variable Z telle que $Y \in \mathrm{L}^p$ et $Y \notin \mathrm{L}^r$, pour tout $r > p$.

2.16. Soit X une variable aléatoire réelle telle que pour tout $t \geqslant 1$,

$$\mathrm{P}(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{c}{t^\alpha},$$

où $c > 0$ et $\alpha > 1$. Montrer que X admet un moment d'ordre k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k < \alpha$.

2.17. Soient $p,q,r \in]0,\infty[$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si $X \in \mathrm{L}^p$ et $Y \in \mathrm{L}^q$, alors $XY \in \mathrm{L}^r$ et on a

$$\|XY\|_r \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q.$$

2.18. Montrer que la fonction caractéristique est à valeurs réelles si et seulement si X et $-X$ ont la même loi.

2.19. Montrer que la conjuguée et la partie réelle d'une fonction caractéristique sont aussi des fonctions caractéristiques.

2.20. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0,1]$. Montrer que $p\varphi + (1-p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

2.21. Soit la fonction

$$f(x,y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4} \mathbb{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y).$$

(i) Montrer qu'il existe un couple aléatoire (X,Y) à valeurs p.s. dans $[-1,1]$ de densité f.
(ii) Trouver les lois et les fonctions caractéristiques de X et Y.

2.22. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathrm{E}(e^{\lambda X}) < \infty$, pour $\lambda > 0$ (ou seulement $0 < \lambda < \lambda_0$). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(X \geqslant t) \leqslant e^{-I(t)},$$

où $I(t) := \sup_\lambda \left(\lambda t - \ln \mathrm{E}(e^{\lambda X})\right)$.

2.23. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(i) Trouver la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer $\mu_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(ii) On note Y_a, $|a| \leqslant 1$, la variable aléatoire de densité

$$f_{Y_a} = f_Y(x)\left(1 + a \sin 2\pi \ln x\right).$$

Calculer $\mu_n(Y_a)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(iii) En déduire que les moments ne caractérisent pas la loi de probabilité.