LICENCE 3 Mathématiques 2007-2008
Espaces vectoriels normés
1. Espaces de Banach

1.1 (quelques rappels d'algèbre)

i) Deux espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

ii) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient M et N deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = M \oplus N$. Alors $\dim E = \dim M + \dim N$.

iii) Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $T \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. On note

$$N(T) = \{x \in E : Tx = 0\} \quad \text{et} \quad R(T) = \{y \in F : y = Tx, x \in E\}.$$

On considère l'espace quotient $E/N(T)$ et on note ξ_x la classe ayant pour représentant x. Alors l'application Θ définie par $\Theta(\xi_x) = Tx$ est un isomorphisme entre $E/N(T)$ et $R(T)$.

iv) Soit E un espace vectoriel tel que $E = M \oplus N$, avec M et N sous-espaces de E. Alors E/M est isomorphe à N.

v) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et M un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim E/M = \dim E - \dim M$.

vi) Soient E un espace vectoriel et M un sous-espace vectoriel de E. Alors M est de codimension finie d si et seulement si il existe d vecteurs linéairement indépendants $x_1, \ldots, x_d \in E$ tels que tout $x \in E$ admet une unique représentation de la forme $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_d x_d + y$, où $\alpha_1, \ldots \alpha_d \in K$ et $y \in M$.

1.2. Montrer que l'hypothèse de positivité d'une norme peut être retrouvée à partir de toutes les autres hypothèses de la définition d'une norme.

1.3. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

1.4. Soit l'application sur $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

Montrer que le supremum dans l'expression précédente est un maximum et ensuite qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1.5. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel normé muni de

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x), \quad (\alpha P)(x) = \alpha P(x), \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)| dx.$$

Calculer $\|P\|$ ($r \geqslant 1$ entier), pour $P(x) = x^r$.

1.6. (caractérisation des espaces de Banach) Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- **i)** E est un espace de Banach ;
- **ii)** toute série absolument convergente est (fortement) convergente ;
- **ii)** pour toute suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ vérifiant $\|x_n\| \leqslant c^n$, avec $0 < c < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est (fortement) convergente.

1.7. Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace fermé de E. Montrer que toutes les classes d'equivalences ξ (modulo M) sont des fermés de E.

1.8. (quelques rappels d'analyse) Soit E un espace vectoriel normé.

- **i)** Montrer que toute suite convergente dans E est de une suite de Cauchy.
- **ii)** Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- **iii)** Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue (à valeurs dans un autre espace normé F) est une suite de Cauchy.

1.9. (espace produit) Soient E et E' deux espaces de Banach munis respectivement des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$. Sur l'espace produit $E \times E'$ on introduit

$$\|(x,y)\|'' := \|x\| + \|y\|', \quad (x,y) \in E \times E'.$$

Montrer que cette application est une norme sur $E \times E'$ et que cet espace normé est un espace de Banach. Même question avec

$$\|(x,y)\|''' := \max\{\|x\|, \|y\|'\}, \quad (x,y) \in E \times E'.$$

1.10. (espaces $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$) Vérifier que sur $\mathbb{R}^d$, resp. $\mathbb{C}^d$, les quantités suivantes sont des normes

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j|, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leqslant j\leqslant d} |x_j|.$$

Justifier que ces espaces sont des espaces de Banach.

1.11. (espace de fonctions continues) Soit S un espace métrique quelconque. On note par $C(S;\mathbb{R})$, resp. $C(S;\mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions continues bornées à valeurs réelles, resp. complexes, définies sur S. Montrer que ces ensembles sont des espaces de Banach avec

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \quad (\alpha x)(s) = \alpha x(s), \quad \|x\| := \sup_{s\in S} |x(s)|.$$

La convergence des suites pour cette norme est la convergence uniforme des fonctions sur S.

1.12. Montrer que $\|x\|_2 := (\int_0^1 |x(s)|^2 ds)^{1/2}$ définit une norme sur $C([0,1];\mathbb{R})$.

1.13. (espace de fonctions lipschitziennes) Montrer que sur l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, l'application

$$x \mapsto |x(0)| + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 1} \frac{|x(s) - x(t)|}{|s - t|}$$

est une norme.

1.14. (espace de fonctions dérivables) Soit $E = \{x \in \mathrm{C}^1([0,1];\mathbb{R}) : x(0) = 0\}$, où $\mathrm{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur E :

i) $x \mapsto \sup_{s\in[0,1]} |x(s)|$;

ii) $x \mapsto \sup_{s\in[0,1]} |x'(s)|$;

iii) $x \mapsto (\int_0^1 (|x(s)|^2 + |x'(s)|^2) ds)^{1/2}$.

1.15. (espace des fonctions p-intégrables) Soit $(S, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$. Nous allons noter par $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{R})$, resp. $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions $x : S \to \mathbb{R}$, resp. $x : S \to \mathbb{C}$, $\mathcal{B}$-mesurables et telle que $|x|^p$ est μ-intégrable sur S.

i) Montrer que ces ensembles sont des espaces vectoriels munis de

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s), \quad (\alpha x)(s) = \alpha x(s).$$

On pose

$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p}.$$

ii) Montrer que $\|x\|_1$ satisfait l'inégalité triangulaire.

iii) Soit $p \in]1, \infty[$ et on note p' l'exposant conjugué de p, défini par $1/p + 1/p' = 1$. Montrer que le minimum de la fonction $f(c) = c^p/p + 1/p' - c$, $c \geqslant 0$, est atteint en $c = 1$ uniquement et calculer ce minimum. En déduire l'*inégalité de Young* : pour tous $a, b \geqslant 0$

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

avec égalité si et seulement si $a = b^{1/(p-1)}$.

iv) Supposons que $A = \|x\|_p$ et $B = \|y\|_{p'}$ sont les deux non-nulles. On pose $a = |x(s)|/A$ et $b = |y(s)|/B$. Utiliser l'inégalité de Young et une intégration pour déduire l'*inégalité de Hölder*

$$\int_S |x(s)y(s)|\mu(ds) \leqslant \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} \left(\int_S |y(s)|^{p'} \mu(ds) \right)^{1/p'}.$$

Montrer que cette inégalité est vraie même si au moins un des A, B s'annule. L'égalité a lieu si et seulement si il existe une constante positive c telle que $|x(s)| = c|y(s)|^{1/(p-1)}$ pour μ-p.t. $s \in S$ (ou $|y(s)| = c|x(s)|^{1/p-1}$ pour μ-p.t. $s \in S$).

v) Montrer que

$$\int_S |x(s)+y(s)|^p \mu(ds) \leqslant \int_S |x(s)+y(s)|^{p-1}|x(s)|\mu(ds) + \int_S |x(s)+y(s)|^{p-1}|y(s)|\mu(ds).$$

Utiliser l'inégalité de Hölder ainsi que le fait que $p'(p-1)=p$ pour déduire l'*inégalité de Minkowski*

$$\left(\int_S |x(s)+y(s)|^p\mu(ds)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_S |x(s)|^p\mu(ds)\right)^{1/p} + \left(\int_S |y(s)|^p\mu(ds)\right)^{1/p}$$

c'est-à-dire l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. L'égalité a lieu si et seulement si il existe une constante positive c telle que $x = cy$ μ-p.p. (ou $y = cx$ μ-p.p.)

vi) Montrer que la condition $\|x\|_p = 0$ est équivalente à $x = 0$ μ-p.p. Soit le sous-espace vectoriel M des fonctions nulles μ-p.p. et soit l'espace quotient $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{R})/M$, resp. $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{C})/M$. Montrer que sur cet espace la norme quotient d'une classe de représentant x coïncide avec la norme $\|x\|_p$. Les espaces quotient avec cette norme seront notés $\mathrm{L}^p(S;\mathbb{R})$, resp. $\mathrm{L}^p(S;\mathbb{C})$. Nous allons identifier une fonction à sa classe d'équivalence, pour simplifier.

vii)* On veut montrer que $\mathrm{L}^p(S)$ est un espace de Banach. Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^p(S)$.

(a) Montrer qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ telle que la série

$$\sum_{k\geqslant 1}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

soit absolument convergente.

(b) On note

$$y_r = |x_{n_1}| + \sum_{k=1}^{r} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \in \mathrm{L}^p(S).$$

Utiliser l'inégalité triangulaire et le lemme de Fatou pour vérifier que

$$\int_S \lim_{r\to\infty} y_r(s)^p \mu(ds) < \infty.$$

(c) En déduire que $\lim_{r\to\infty} y_r$ existe finie p.p. et donc $\lim_{r\to\infty} x_{n_{r+1}}$ existe finie p.p. notée x_∞.

(d) Utiliser encore une fois l'inégalité de Fatou pour déduire que

$$\int_S \lim_{r\to\infty} |x_{n_r} - x_{n_k}|^p \mu(ds) \leqslant \left(\sum_{j=k}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\|_p\right)^p.$$

En déduire que $x_\infty - x_{n_k} \in \mathrm{L}^p(S)$ et donc $x_\infty \in \mathrm{L}^p(S)$.

(e) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \|x_\infty - x_{n_k}\|_p = 0$ et que $\limsup_{n\to\infty} \|x_\infty - x_n\|_p = 0$. Conclure.

1.16.* (espace L^∞) Soit $(S, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction mesurable x est dite *essentiellement bornée* s'il existe une constante positive c telle que $|x(s)| \leqslant c$ pour μ-p.t. $s \in S$. L'infimum de toutes ces constantes c est noté $\operatorname{esssup}_{s\in S}|x(s)|$. Comme dans l'exercice précédent on identifie les fonctions égales μ-p.p. (donc avec la classe modulo $M = \{x = 0\, p.p.\}$).

i) Montrer que l'ensemble $L^\infty(S;\mathbb{R})$, resp. $L^\infty(S;\mathbb{C})$, des fonction mesurables essentiellement bornées est un espace vectoriel normé muni de

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \quad (\alpha x)(s) = \alpha x(s), \quad \|x\|_\infty := \operatorname{esssup}_{s\in S}|x(s)|.$$

(on définit comme dans l'exercice précédent $L^\infty(S)$).

ii) Montrer que $L^\infty(S)$ est un espace de Banach.

iii) On veut montrer que si $\mu(S) < \infty$, alors, pour $x \in L^\infty(S)$, $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, où $\|\cdot\|_p$ est la norme de $L^p(S)$.

(a) Montrer que

$$\limsup_{p\to\infty} \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} \leqslant \operatorname{esssup}_{s\in S}|x(s)|.$$

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable A_ε de mesure $\mu(A_\varepsilon) > 0$ tel que

$$\left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} \geqslant \mu(A_\varepsilon)^{1/p} (\operatorname{esssup}_{s\in S}|x(s)| - \varepsilon).$$

En déduire

$$\liminf_{p\to\infty} \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} \geqslant (\operatorname{esssup}_{s\in S}|x(s)| - \varepsilon).$$

1.17.

i) On considère l'ensemble ℓ_∞ de suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ bornées (on peut regarder x comme une application de $S = \{1, 2, \ldots\}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $x(j) = u_j$). Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé muni de

$$(x+y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{j\geqslant 1} |x(j)| = \sup_{j\geqslant 1} |u_j|.$$

Montrer ensuite que $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

ii) Montrer que l'ensemble des suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que $\lim_{j\to\infty} u_j$ existe constitue un espace vectoriel normé, noté c avec

$$(x+y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1} |x(n)| = \sup_{n\geqslant 1} |u_n|$$

et c'est un espace de Banach.

iii) Montrer que l'ensemble de toutes les suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$ existe constitue un espace vectoriel normé, noté c_0 avec

$$(x+y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1} |x(n)| = \sup_{n\geqslant 1} |u_n|$$

et c'est un espace de Banach.

iv) Montrer que l'ensemble de toutes les suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que $\mathrm{supp}(x) = \mathrm{supp}(u_j)$ est fini (ici $\mathrm{supp}(u_j) = \{j \geqslant 1 : u_j \neq 0\}$ est le support d'une suite) constitue un espace vectoriel normé, noté c_{00} avec

$$(x+y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1} |x(n)| = \sup_{n\geqslant 1} |u_n|$$

et ce n'est pas un espace de Banach.

v) Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que l'ensemble de toutes les suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que la série $\sum_{j\geqslant 1} |u_j|^p < \infty$ constitue un espace vectoriel normé, noté ℓ_p avec

$$(x+y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{j\geqslant 1} |x(j)|^p\right)^{1/p}.$$

et c'est un espace de Banach.

1.18. Soient $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Montrer que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ pour $x \in \ell_p$ mais que $\|x\|_p \leqslant \|x\|_q$ pour $x \in \mathrm{L}^q([0,1])$. En déduire que $\ell_p \subset \ell_q$ et $\mathrm{L}^q([0,1]) \subset \mathrm{L}^p([0,1])$ et que les opérateurs identité correspondants ont la norme 1.

1.19.

i) Si $x \in \mathrm{L}^{p_0}([0,1])$ pour un $p_0 > 1$, montrer que $\lim_{p\downarrow 1} \|x\|_p = \|x\|_1$.

ii) Montrer que si $x \in \mathrm{L}^\infty([0,1])$ alors $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

iii) Si $x \in \ell_q$ pour un certain $q \geqslant 1$, montrer que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

1.20. (séparabilité) Montrer que

i) si $p \in [1, \infty[$, ℓ_p est séparable ;

ii) c et c_0 sont séparables ;

iii)* ℓ_∞ n'est pas séparable ;

iv) $C([0,1])$ est séparable ;

v) si $p \in [1, \infty[$, $\mathrm{L}^p([0,1])$ est séparable ;

vi) $\mathrm{L}^\infty([0,1])$ n'est pas séparable.

1.21. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, il existe une isométrie linéaire entre ℓ_p et un sous-espace de $\mathrm{L}^p([0,1])$.

1.22. Une propriété $\mathcal{P}$ est dite *propriété des trois espaces* si la phrase suivante est vraie : pour un sous-espace M fermé d'un espace vectoriel normé E, si M et E/M ont la propriété $\mathcal{P}$, alors E a la propriété $\mathcal{P}$.

i) Montrer que la propriété d'être un espace complet est une “propriété des trois espaces” ;

ii) Montrer que la propriété d'être un espace séparable est une “propriété des trois espaces”.

1.23. Soient M, N deux sous-espaces d'un espace de Banach E telles que M et N soient isomorphes. E/M et E/N sont-elles isomorphes ? On pourra considérer ℓ_2, $\{(0, u_2, u_3, \ldots)\}$ et $\{(0, 0, u_3, \ldots)\}$.

1.24. Soit $x = (u_j) \in \ell_\infty$ et le sous-espace c_0. Montrer que $\mathrm{dist}(x, c_0) = \limsup_{j\to\infty} |u_j|$. En déduire que la norme sur ℓ_∞/c_0 est $\|\xi_x\| = \limsup_{j\to\infty} |u_j|$, où ξ_x est la classe de représentant $x = (u_j)$.

1.25. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. On note $B_j = \{x \in E : \|x\|_j \leqslant 1\}$, $j = 1, 2$ les boules unité pour les deux normes.

i) Montrer que $\|x\|_1 \leqslant c\,\|x\|_2$, $\forall x \in E$ $(c > 0)$ si et seulement si $\frac{1}{c}B_2 \subset B_1$.

ii) Montrer que si les normes sont équivalents alors B_1 et B_2 sont homéomorphes.

1.26. Soit $T \in B(E, F)$, où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

1.27. Soit $T \in L(E, F)$, où E, F sont deux espaces vectoriels normés. On suppose que $\{Tx_n\}_{n\geqslant 1}$ est bornée pour chaque suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que $\|x_n\| \to 0$, quand $n \to \infty$. T est-il nécéssairement continu ?

1.28. Soit $T \in B(E, F)$, où E, F sont deux espaces de Banach. Montrer que s'il existe $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geqslant \delta\|x\|$, $\forall x \in E$, alors $R(T)$ est un espace de Banach. De plus T est un isomorphisme de E dans F.

1.29. Soit $T \in B(E, F)$, où E, F sont deux espaces vectoriels normés. On suppose que T est bijective. Dans E on note $B_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ et $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ et de même dans F, B_F, S_F. Les affirmations suivantes sont equivalentes :

i) T est une isométrie de E sur F ;

ii) $T(B_E) = B_F$;

iii) $T(S_E) = S_F$;

iv) $T(\mathring{B}_E) = \mathring{B}_F$.

1.30. Montrer qu'un espace de Banach est séparable si et seulement si $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ est séparable.

1.31. Montrer que l'espace normé $\mathrm{L}^2(S;\mathbb{K})$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(x,y) := \int_S x(s)\overline{y(s)}\mu(ds).$$

Montrer que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ est un système orthonormal complet de l'espace $\mathrm{L}^2([0,2\pi];\mathbb{C})$.

1.32. Montrer que l'espace normé ℓ_2 est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(x,y) = ((u_j),(v_j)) := \sum_{j\geqslant 1} u_j\overline{v_j}.$$

1.33. Montrer que l'espace normé $\mathrm{C}^1(]0,1[;\mathbb{R})$ avec la norme $\|x\| := (\int_0^1(|x(s)|^2+|x'(s)|^2)ds)^{1/2}$ est un espace prehilbertien dont on indiquera le produit scalaire.

1.34. Soit E un espace de Hilbert. Montrer que $\|\cdot\|$ satisfait l'égalité du parallélogramme généralisée

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^r \varepsilon_j x_j\right\|^2 = 2^r\sum_{j=1}^r \|x_j\|^2.$$

1.35. Montrer que dans $E = \ell_2$ l'orthogonal du sous-espace des suites ayant le support fini est $\{0\}$. On pourra considérer une base orthonormée $\{e_n\}$ et calculer (x,e_n) pour $n \in \operatorname{supp}(x)$ et $x \in E$. Commenter le résultat.

1.36. Soit $\{e_n\}$ une suite orthonormée dans ℓ_2, $e_n = (u_j^n)$. Montrer que pour tout $j \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} u_j^n = 0$.

1.37. Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée. On pose, pour $x = \sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$, $\|x\|_0 := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}|x_n|$. Montrer que $\|\cdot\|_0$ est une norme qui n'est pas équivalente à la norme de E.

1.38. Soit $A := \{x = (u_j) \in \ell_2 : \sum_{j\geqslant 1}(1+\frac{1}{j})u_j^2 \leqslant 1\}$. Montrer que A est un fermé borné mais ne contient pas un élément de norme égale au $\sup\{\|x\| : x \in A\}$.

1.39.* Le cube de Hilbert est défini par $C := \{x = (u_j) \in \ell_2 : \forall j \geqslant 1, |u_j| \leqslant 2^{-j}\}$. Montrer que C est un compact de ℓ_2.

1.40. (l'espace de Hardy-Lebesgue) Soit HL^2 l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes qui sont holomorphes dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et telles que

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Montrer que HL^2 est un espace prehilbertien avec la norme

$$\|f\| := \sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)\right]^{1/2}$$

qui est isomorphe à ℓ_2 (ainsi HL^2 est un espace de Hilbert). On pourra remarquer que $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} c_j z^j$ et calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$. Ensuite, étant donné $(c_j) \in \ell_2$, montrer que la fonction $z \mapsto \sum_{j\geqslant 0} c_j z^j$ appartient à HL^2