

FEUILLE D'EXERCICES # 2
Espaces de probabilités

Exercice 1 *Formule du crible*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Montrer que si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille d'évènements, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3),$$

et plus généralement

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right).$$

Montrer que

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathbb{P}(A_j \cap A_k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j).$$

Exercice 2 *Convergence monotone pour les probabilités*

Soient un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty[$ une application additive, autrement dit $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B = \emptyset$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1. \mathbb{P} est une probabilité, i.e. elle est σ -additive.
2. \mathbb{P} est continue sur des suites croissantes :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

3. \mathbb{P} est continue sur des suites décroissantes :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

4. \mathbb{P} est continue sur des suites décroissantes vers \emptyset :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 3 *Limites inférieure et supérieure*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et on note

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m.$$

1. Montrer que $\omega \in \liminf_n A_n$ ssi à partir d'un certain rang, ω est dans tous les A_n .

2. Montrer que $\omega \in \limsup_n A_n$ ssi ω est dans une infinité de A_n .
3. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$.
4. On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors elle est convergente et préciser la limite.
5. Montrer que si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, on a alors la propriété de continuité de la mesure $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 4 *Limites inférieure et supérieure, suite*

Décrire les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ dans les cas suivantes

1. $A_n =]-\infty, n]$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
2. $A_n =]-\infty, -n]$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
3. $A_n =]-\infty, (-1)^n]$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
4. $A_{2n} = A, A_{2n+1} = B$ avec $A, B \in \mathcal{F}$.

Exercice 5 *Premier lemme de Borel–Cantelli*

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'événements qui est telle que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 6 *Presque sûr*

On dit qu'un événement $A \in \mathcal{F}$ est presque sûr si A est presque sûrement égal à Ω , c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$ avec N un ensemble négligeable, i.e. il existe $B \in \mathcal{F}$ avec $N \subset B$ et $\mathbb{P}(B) = 0$. Soit K un ensemble d'indices au plus dénombrable et $(A_k)_{k \in K}$ une famille d'événements presque sûrs. Montrer que $\bigcap_{k \in K} A_k$ est presque sûr.

Exercice 7 *Tribu complétée*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\overline{\mathcal{F}} := \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, \text{ tels que } A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) = 0\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est une tribu et plus précisément $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ où \mathcal{N} est la classe des ensembles \mathbb{P} -négligeables, c'est-à-dire $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{F} : N \subset B, \mathbb{P}(B) = 0\}$.
2. On définit une nouvelle mesure $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $\overline{\mathbb{P}}(C) := \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Montrer que $\overline{\mathbb{P}}$ est bien définie, i.e. que sa valeur ne dépend pas du choix des encadrants A_1 et A_2 , et que $\overline{\mathbb{P}}$ est l'unique mesure sur la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ qui prolonge \mathbb{P} , i.e. qui coïncide avec \mathbb{P} sur \mathcal{F} .
3. Montrer que pour toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $\overline{\mathcal{F}}$ -mesurable, il existe des fonctions \mathcal{F} -mesurables $U, V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que $U \leq X \leq V$ et $V - U = 0$, \mathbb{P} -presque sûrement.

Exercice 8 *Support d'une mesure*

Soit μ une mesure borélienne sur \mathbb{R}^n (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On définit le support de la mesure μ comme l'ensemble

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n ; \mu(B(x, r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus S) = 0$, et que $\mu(S \setminus F) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S .