LICENCE DE MATHÉMATIQUES 3ème année
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Mihai Gradinaru

2007-2008

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Banach et de Hilbert

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (dans la suite $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\|\cdot\|$ telle que*

a) $\|x\| \geqslant 0$, $\forall x \in E$ *et* $\|x\| = 0$ *ssi* $x = 0$ *;*

b) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire),* $\forall x, y \in E$ *;*

c) $\alpha x = |\alpha| \cdot \|x\|$ *(homogénéité),* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$.

Un espace vectoriel normé (e.v.n.) est un couple $(E, \|\cdot\|)$. Il s'agit d'un cas particulier d'espace métrique muni de la distance

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$

La topologie sur E est la topologie d'espace métrique. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ converge (fortement) vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \to 0$, lorsque $n \to \infty$.

Proposition 1.1

1. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$ *;*
2. *si* $x_n \to x$, *alors* $\|x_n\| \to \|x\|$, *lorsque* $n \to \infty$ *;*
3. *si* $\alpha_n \to \alpha$, $x_n \to x$, *alors* $\alpha_n x_n \to \alpha x$, *lorsque* $n \to \infty$ *;*
4. *si* $x_n \to x$, $y_n \to y$, *alors* $x_n + y_n \to x + y$, *lorsque* $n \to \infty$.

Preuve. On peut écrire $\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$ et $\|x - y\| = |-1| \cdot \|y - x\| \geqslant \|y\| - \|x$, d'où la première inégalité. De cette inégalité le deuxième point est immédiat. Pour le dernier point on utilise l'inégalité triangulaire : $\|(x+y)-(x_n+y_n)\| = \|(x-x_n)+(y-y_n)\| \leqslant \|x-x_n\|+\|y-y_n\|$. Enfin, $\|\alpha x - \alpha_n x_n\| \leqslant \|\alpha x - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha_n x_n\| = |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x\| + |\alpha_n| \cdot \|x - x_n\|$. On déduit le troisième point puisque $\{\alpha_n\}$ est une suite bornée. □

Remarque : On a obtenu que $\|\cdot\|$ est lipschitzienne (donc uniformément continue sur E) et que les opérations $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ sont continues.

Définition 1.2 *Une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ est dite* de Cauchy *si* $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. *Un e.v.n. est dit* espace de Banach *s'il est complet en tant qu'espace métrique, autrement dit, si chaque suite de Cauchy converge (fortement) vers un point $x_\infty \in E$.*

REMARQUE : Si $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ est convergente, alors elle est de Cauchy. De plus, si une suite admet une limite, alors la limite est unique.

Proposition 1.2 *Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans e.v.n. E. Alors $\{x_n\}$ est bornée dans E.*

Preuve. Comme $\{x_n\}$ est de Cauchy, on peut trouver un entier $n_1 \geqslant 1$ tel que $\|x_n - x_{n_1}\| \leqslant 1$, pour chaque $n \geqslant n_1$. Alors $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x_{n_1}\| + \|x_{n_1}\| \leqslant 1 + \|x_{n_1}\|$, pour chaque $n \geqslant n_1$. On déduit que

$$\|x_n\| \leqslant \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_1-1}\|, 1 + \|x_{n_1}\|\}.$$

□

Définition 1.3 *Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite dans e.v.n. E. On note $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ une* série *dans E et $s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$, $n \geqslant 1$, la suite des* sommes partielles. *La série est dite* convergente *s'il existe $s \in E$ tel que $s_n \to s$, lorsque $n \to \infty$ et dans ce cas on écrit $\sum_{n\geqslant 1} x_n = s$. La série est dite* absolument convergente *si $\sum_{n\geqslant 1} \|x_n\| < \infty$.*

Théorème 1.1 *(caractérisation des espaces de Banach)*
Soit E un e.v.n. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *E est un espace de Banach ;*
2. *toute série absolument convergente est (fortement) convergente ;*
3. *pour toute suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ vérifiant $\|x_n\| \leqslant c^n$, avec $0 < c < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est (fortement) convergente.*

Preuve.
1) ⇒ 2) On note $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles d'une série absolument convergente $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Alors, si $m > n$, $\|s_n - s_m\| = \|\sum_{j=n+1}^{m} x_j\| \leqslant \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\|$. On déduit, d'après l'absolue convergence, que $\{s_n\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E, donc convergente. La série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est donc convergente.
2) ⇒ 3) C'est un cas particulier de 2) car $\sum_{n\geqslant 1} c^n < \infty$.
3) ⇒ 1) Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy de E. On peut extraire une sous-suite $\{n_k\}$ telle que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leqslant 2^{-k}$. Cela se fait par réccurence : on fixe $n_1 \geqslant 1$ entier et on choisit $n_2 > n_1$ tel que $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < 2^{-1}$, etc. On pose $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, donc $x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} y_j$. Mais $\|y_k\| \leqslant (1/2)^k$, donc $\sum_{k\geqslant 1} y_k$ converge, donc $x_{n_{k+1}} \to x_\infty$, disons, lorsque $k \to \infty$. Ensuite on écrit $\|x_\infty - x_n\| \leqslant \|x_\infty - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\|$ et en prenant la limite supérieure quand $n \to \infty$ on conclut. □

Tout sous-espace M d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. avec la restriction de $\|\cdot\|$ à M.

Proposition 1.3 *Soit M un sous-espace d'un espace de Banach E. M est un espace de Banach ssi M est un fermé de E.*

Preuve. Supposons M fermé et soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans M Puisque la norme sur M est la restriction de la norme sur E, la suite est de Cauchy dans E, donc elle convergente vers un $x \in E$. Mais la suite étant dans M et convergente vers x et M étant fermé, on déduit que $x \in M$, donc M est complet. L'autre implication se démontre de la même façon. $\square$

Théorème 1.2 (résultat admis) *(existence du complété)*
Soit E un e.v.n. qui n'est pas complet. Alors E est isomorphe et isométrique avec un sous-espace vectoriel dense d'un espace de Banach $\tilde{E}$.

Proposition 1.4 *Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{K}$. Alors $E_1 \times E_2$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}. \tag{1.1}$$

Preuve. On montre sans difficulté que (1.1) définit une norme sur $E_1 \times E_2$ et ensuite que les coordonnées d'une suite de Cauchy dans l'espace produit sont des suites de Cauchy. $\square$.

Remarque : D'autres normes peuvent être considérées :

$$\|(x_1, x_2)\|' = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \quad \text{ou} \quad \|(x_1, x_2)\|'' = \left(\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Définition 1.4 *Soit E un e.v.n. On dit que E est séparable s'il existe une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ qui est dense dans E.*

1.1.2 Exemples fondamentaux

1. $\mathrm{C}([0,1];\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonction continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$$

est un espace de Banach séparable, noté dans la suite $\mathrm{C}([0,1])$.

2. $\mathbb{K}^d = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ muni des normes

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |u_j|^p\right)^{1/p}, \ p \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{|u_j| : j = 1, \ldots, d\}$$

sont des espaces de Banach séparables, notés dans la suite ℓ_p^d, $p \in [1, \infty]$.

3. a) L'espace vectoriel $\{(u_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{K} : \sum_{j\geqslant 1} |u_j|^p < \infty\}$ $(p \in [1, \infty])$ muni de la norme

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j\geqslant 1} |u_j|^p\right)^{1/p}, \ p \geqslant 1$$

est un espace de Banach séparable, noté ℓ_p.
b) L'espace vectoriel $\{(u_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{K}$ bornée$\}$ muni de la norme

$$\|x\|_\infty := \sup\{|u_j| : j \geqslant 1\}$$

est un espace de Banach non-séparable, noté ℓ_∞.
c) L'espace vectoriel $\{(u_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{K} \text{ convergente}\}$ muni de la norme

$$\|x\|_\infty := \sup\{|u_j| : j \geqslant 1\}$$

est un espace de Banach séparable, noté c.

4. a) $\mathrm{L}^p([0,1];\mathbb{K})$ ($p \in [1,\infty]$), l'espace vectoriel des classes des fonctions définies presque partout sur $[0,1]$, mesurables et p-intégrables sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(s)|^p ds\right)^{1/p}$$

est un espace de Banach séparable, noté $\mathrm{L}^p([0,1])$.
b) $\mathrm{L}^\infty([0,1];\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des classes des fonctions essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|x\|_\infty := \operatorname{esssup}(|x|) = \inf\{\sup_{s\in A} |x(s)| : \forall A \subset [0,1] \text{ de mesure nulle}\}$$

est un espace de Banach non-séparable, noté $\mathrm{L}^\infty([0,1])$.

1.1.3 Espace quotient d'un espace de Banach

Proposition 1.5 *Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. On dit que deux vecteurs $x_1, x_2 \in E$ sont équivalents modulo M si $x_1 - x_2 \in M$ et on écrit cela $x_1 \equiv x_2(\mathrm{mod} M)$. Alors*

1. *$x \equiv x(\mathrm{mod} M)$,*
2. *si $x_1 \equiv x_2(\mathrm{mod} M)$, alors $x_2 \equiv x_1(\mathrm{mod} M)$,*
3. *si $x_1 \equiv x_2(\mathrm{mod} M)$ et $x_2 \equiv x_3(\mathrm{mod} M)$, alors $x_1 \equiv x_3(\mathrm{mod} M)$.*

Preuve. Il est clair que $x - x = 0 \in M$. Si $x_1 - x_2 \in M$, alors $x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) \in M$. Enfin, si $x_1 - x_2 \in M$ et $x_2 - x_3 \in M$, alors $x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \in M$. □

Nous allons noter l'ensemble des vecteurs $\in E$ équivalents modulo M à un vecteur fixé x par ξ_x (ou encore $x+M$ ou $\hat{x}$). En virtue des propriétés 2 et 3 de la Proposition précédente, tous les vecteurs de ξ_x sont mutuellement équivalents modulo M. ξ_x est une classe d'équivalence (modulo M). Chaque vecteur de ξ_x est un représentant de la classe. Une classe est entièrement déterminée par un de ses représentants, c'est-à-dire que si $y \in \xi_x$, alors $\xi_y = \xi_x$. Ainsi deux classes sont ou bien disjointes (quand $y \notin \xi_x$) ou coïncident (quand $y \in \xi_x$). L'espace entier se décompose en classes ξ de vecteurs mutuellements équivalents (modulo M).

Proposition 1.6 *Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et on considère l'ensemble des classes (modulo M) introduites ci-dessus. On munit cet ensemble de deux opérations, l'addition des classes et la multiplication par un scalaire d'une classe :*

$$\xi_x + \xi_y = \xi_{x+y}, \quad \alpha\xi_x = \xi_{\alpha x}.$$

On obtient une structure d'espace vectoriel, noté dans la suite E/M et nommé espace quotient de E (modulo M).

Preuve. Les deux définitions ne dépendent pas du choix des représentants x, y des classes ξ_x, ξ_y. En fait si $x_1 - x \in M$ et $y_1 - y \in M$, alors

$$(x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y) \in M, \quad \alpha x_1 - \alpha x = \alpha(x_1 - x) \in M.$$

On a ainsi démontré que $\xi_{x_1+y_1} = \xi_{x+y}$ et $\xi_{\alpha x_1} = \xi_{\alpha x}$. Les propriétés d'espace vectoriel sont obtenues facilement. □

Si E est un e.v.n. et si M est un fermé de E, alors il est facile de voir que chaque classe $\xi \in E/M$ est un fermé pour la topologie de E.

Théorème 1.3 *(espace quotient)*
Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach E. On définit sur E/M

$$\|\xi\| = \inf\{\|x\| : x \in \xi\}. \tag{1.2}$$

Alors cette application est une norme sur E/M et l'espace E/M muni de cette norme est un espace de Banach.

Preuve. Si $\xi = 0$, alors ξ coïncide avec M et contient le vecteur zéro de E ; on déduit de (1.2) que $\|\xi\| = 0$. Supposons maintenant l'inverse, c'est-à-dire que $\|\xi\| = 0$. D'après (1.2), la classe ξ contient une suite $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ pour laquelle $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Alors le vecteur zéro de E appartient au fermé ξ, donc $\xi = M$ et donc c'est le vecteur zéro de E/M.

Soient $\xi, \eta \in E$. D'après (1.2), pour tout $\varepsilon > 0$, il existent $x \in \xi, y \in \eta$ tels que

$$\|x\| \leqslant \|\xi\| + \varepsilon, \|y\| \leqslant \|\eta\| + \varepsilon.$$

Donc $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \leqslant \|\xi\|+\|\eta\|+2\varepsilon$. D'autre part, $(x+y) \in (\xi+\eta)$, donc $\|\xi+\eta\| \leqslant \|x+y\|$, d'après (1.2). En conséquence on a $\|\xi+\eta\| \leqslant \|\xi\|+\|\eta\|+2\varepsilon$ et on déduit l'inégalité triangulaire, $\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$.

Enfin, il est facile de voir que l'égalité $\|\alpha\xi\| = |\alpha|\|\xi\|$ est vraie.

Supposons maintenant que $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans E/M. Alors $\{\xi_n\}$ contient une sous-suite $\{\xi_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ telle que $\|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\| < 2^{-k-2}$. D'après (1.2), on peut choisir dans chaque classe $(\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k})$ un vecteur y_k tel que

$$\|y_k\| < \|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\| + 2^{-k-2} < 2^{-k-1}.$$

Soit aussi $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$. La série $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \ldots$ converge, et comme E est complet, cette série converge vers un élément $x \in E$. Soit ξ la classe contenant x. Nous allons montrer que $\xi_n \to x$ dans la norme de E/M. Soit s_k la somme partielle de la série précédente $x_{n_1} + y_1 + \ldots + y_k$ et on a $\lim_{k\to\infty} \|x - s_k\| = 0$. D'autre part, comme $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$ et $y_j \in (\xi_{n_{j+1}} - \xi_{n_j})$, on déduit que $s_k \in \xi_{n_{k+1}}$. Donc, d'après (1.2)

$$\|\xi - \xi_{n_{k+1}}\| \leqslant \|x - s_k\| \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Enfin, de l'inégalité $\|\xi - \xi_n\| \leqslant \|\xi - \xi_{n_k}\| + \|\xi_{n_k} - \xi_n\|$ et du fait que $\{\xi_n\}$ est de Cauchy, on conclut que $\lim_{n\to\infty} \|\xi - \xi_n\| = 0$. □

1.1.4 Espace des opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1 *Soient E, F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application $T : x \mapsto y = Tx$ définie sur un sous-espace vectoriel $D \subset E$ et à valeurs dans F est dite linéaire si*

$$T(\alpha x + \beta x') = \alpha Tx + \beta Tx'.$$

La définition implique en particulier $T0 = 0$, $T(-x) = -Tx$. On notera $D(T) := D$, $R(T) := \{y \in F : y = Tx, x \in D(T)\}$ et $N(T) := \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ et on les appelera *domaine*, *image* et *noyau* de T, respectivement. On appelera T *opérateur linéaire* de $D(T) \subset E$ dans F.Si l'image $R(T)$ est contenue dans le corps $\mathbb{K}$ alors T est une *fonctionnelle linéaire*. Si T est injective de $D(T)$ sur $R(T)$, alors T est bijective entre $D(T)$ et $R(T)$ et l'application inverse T^{-1} est un opérateur linéaire de $R(T)$ sur $D(T)$:

$$T^{-1}Tx = x,\ x \in D(T), \quad \text{et } TT^{-1}y = y,\ y \in R(T).$$

T^{-1} est l'*opérateur inverse*.

Proposition 1.7 *Un opérateur linéaire admet l'inverse T^{-1} ssi $Tx = 0$ implique $x = 0$.*

Preuve. C'est une conséquence du fait que $T(x - x') = Tx - Tx'$. □

Dans la suite nous allons noter $L(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de E dans F.

Proposition 1.8 *(continuité des opérateurs linéaires)*
Soient E et F deux e.v.n. et soit $T \in L(E, F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *T est continu sur E,*
2. *T est continu en 0 ;*
3. *il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \leqslant c\|x\|$, $\forall x \in E$.*

Preuve. $1 \Rightarrow 2$ est triviale. $2 \Rightarrow 3$: si on suppose 2 vraie, alors si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|Tx\| \leqslant \varepsilon$ lorsque $\|x\| \leqslant \delta$. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $\left\|\delta \frac{x}{\|x\|}\right\| = \delta$ et alors $\left\|T\left(|\delta \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \varepsilon$. Alors $\|Tx\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\|x\|$, c'est-à-dire 3 avec $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$. Enfin $3 \Rightarrow 1$: si on suppose 3 vraie, alors on a, pour tous $x, x' \in E$, $\|Tx - Tx'\| = \|T(x - x')\| \leqslant c\|x - x'\|$, donc T est lipschitzienne, donc continue. □

Corollaire 1.1 *Soient E et F deux e.v.n. $T \in L(E, F)$ admet un inverse continu T^{-1} ssi il existe une constante $c' > 0$ telle que $\|Tx\| \geqslant c'\|x\|$, $\forall x \in E$.*

Définition 1.2 *Soit $T \in L(E, F)$ continu entre deux e.v.n. E et F. On définit*

$$\|T\| = \inf\{c : \|Tx\| \leqslant c\|x\|, \forall x \in E\}.$$

D'après la proposition précédente il est facile de voir que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

$\|T\|$ s'appelle la norme de T. Un opérateur linéaire continu de E dans F e.v.n. est un opérateur linéaire borné puisque $T(B_E)$ est un ensemble borné, avec $B_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité. Notons aussi que pour T continu

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|, \forall x \in E.$$

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés (continus) de E dans F sera noté $B(E,F)$. C'est un espace vectoriel avec les opérations

$$(T+S)x = Tx + Sx,\ x \in E \quad \text{et} \quad (\alpha T)x = \alpha(Tx),\ x \in E.$$

Théorème 1.4 *(espace des opérateurs bornés)*
Soient E et F deux e.v.n. $\|T\|$ est une norme pour $T \in B(E,F)$. Si F est un espace de Banach, alors $B(E,F)$ est un espace de Banach.

Preuve. Il est évident que $\|T\| \geqslant 0$. Si $\|T\| = 0$, alors $\|Tx\| = 0$, pour tout $x \in E$, donc T est l'opérateur nul. Soit $x \in B_E$. Alors $\|(T+S)x\| \leqslant \|Tx\| + \|Sx\| \leqslant \|T\| + \|S\|$, d'où en prenant le supremum en $x \in B_E$, on trouve $\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$. Enfin, $\|\alpha T\| = \sup\{\|\alpha Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} = |\alpha| \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} = |\alpha|\|T\|$.

Supposons que $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $B(E,F)$. Pour tout $x \in E$, $\{T_n x\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach F, donc admet une limite notée Tx. On définit ainsi une application $T : E \to F$. Elle est linéaire par passage à la limite dans l'égalité $T_n(\alpha x + \beta x') = \alpha T_n x + \beta T_n x'$. Par ailleurs la suite $\{\|T_n\|\}_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, puisque $|\|T_m\| - \|T_n\|| \leqslant \|T_m - T_n\|$, donc elle est bornée, disons par une constante $c > 0$. Par conséquent, $\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|\,\|x\| \leqslant c\|x\|$, pour tout $x \in B_E$. En passant à la limite quand $n \to \infty$, on trouve $\|Tx\| \leqslant c\|x\|$, pour tout $x \in B_E$. Ainsi $T \in B(E,F)$. Montrons que $T_n \to T$. Cela découle de l'inégalité suivante

$$\|Tx - T_n x\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m x - T_n x\| \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|\,\|x\|.$$

□

Définition 1.3 *Un opérateur $T \in B(E,F)$ est un* isomorphisme linéaire *(ou plus court,* isomorphisme*) entre les e.v.n. E et F si T est une bijection et $T^{-1} \in B(F,E)$. Les espaces E et F* isomorphes *s'il existe $T \in B(E,F)$ un isomorphisme linéaire. Un tel isomorphisme transporte les suites de Cauchy dans des suites de Cauchy. En particulier, si E et F sont isomorphes et si E est de Banach, alors F est de Banach également.*

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalents *si l'opérateur identité $Ix = x$ est isomorphisme entre $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, c'est-à-dire, qu'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que $c\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$, pour tout $x \in E$.*

$T \in B(E,F)$ est une isométrie linéaire *(ou plus court* isométrie*) si $\|Tx\|_F = \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. Les espaces E et F* isométriques *s'il existe $T \in B(E,F)$ une isométrie linéaire.*

1.1.5 Espaces de dimension finie

Proposition 1.9 *Soit E un e.v.n. de dimension finie. Alors n'importe quelles deux normes sont équivalentes. En particulier, tout e.v.n. de dimension d est isomorphe avec ℓ_2^d. En particulier, tout e.v.n. est de Banach.*

Preuve. Soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ une base algébrique de E. Chaque élément $x \in E$ admet une représentation unique en termes de cette base $x = \sum_{j=1}^d u_j e_j$. On introduit une nouvelle norme, notée $\|\cdot\|_1$ donnée par $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |u_j|$. C'est clairement une norme, par exemple, l'inégalité triangulaire se vérifie comme suit : si $y = \sum_{j=1}^d v_j e_j$, alors $x+y = \sum_{j=1}^d (u_j+v_j)e_j$ et

$$\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^d |u_j + v_j| \leqslant= \sum_{j=1}^d |u_j| + = \sum_{j=1}^d |v_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Montrons que toute autre norme sur E, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. Montrons d'abord que toute autre norme sur E, $\|\cdot\|$ est une fonction lipschitzienne sur $(E, \|\cdot\|_1)$. En effet, avec les mêmes notations,

$$\|x-y\| = \left\|\sum_{j=1}^d (u_j - v_j)e_j\right\| \leqslant \sum_{j=1}^d |u_j - v_j| \|e_j\| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|e_j\| \sum_{j=1}^d |u_j - v_j| = \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|e_j\| \cdot \|x-y\|_1.$$

On déduit que $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant d} \|ej\| \cdot \|x-y\|_1$.

Montrons que $S_1 = \{x \in E : \|x\|_1 = 1\}$ est un compact dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset S_1$. On a que pour tout $n \geqslant 1$, $x = \sum_{j=1}^d u_j^n e_j$ et $\sum_{j=1}^d |u_j^n| = 1$. Ainsi, pour tout j, la suite $\{u_j^n\}_{n\geqslant 1}$ est bornée. En tant que suite réelle ou complexe, elle admet une sous-suite convergente, $u_j^{n_k} \to u_j$, lorsque $k \to \infty$. Alors $\sum_{j=1}^d |u_j^{n_k} - u_j| \to 0$, lorsque $k \to \infty$ et donc $\|x_{n_k} - x\|_1 \to 0$, lorsque $k \to \infty$, où $x = \sum_{j=1}^d u_j e_j$. De plus $\sum_{j=1}^d |u_j^{n_k}| = 1$, pour chaque $k \geqslant 1$, donc $\sum_{j=1}^d |u_j| = 1$, c'est-à-dire que $x \in S_1$.

Puisque la fonction $\|\cdot\|$ est continue sur le compact S_1 il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que $c \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\| < C$, pour tout $x \neq 0$ de E. On déduit que $c\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant C\|x\|_1$ pour tout $x \in E$. Ainsi $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_1$. Par conséquent, toutes les normes sont équivalentes.

Si E est un e.v.n. de dimension d et si T est une bijection linéaire de E dans ℓ_2^d, on peut définir une norme $\|\cdot\|_2$ sur E en posant $\|x\|_2 := \|Tx\|_{\ell_2^d}$. Alors l'isomorphisme linéaire T est une isométrie de $(E, \|\cdot\|_2)$ et ℓ_2^d et d'après ce qui précéde $\|\cdot\|_2$ est une norme équivalente. $\square$

Théorème 1.5 *(de Riesz de "presque orthogonalité")*
Soit E un e.v.n. et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé tel que $M \neq E$. Alors, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(x_\varepsilon, M) := \inf_{m\in M} \|x_\varepsilon - m\| \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Preuve. Soit $y \in E \setminus M$. Un tel y existe car $E \setminus M \neq \emptyset$. Comme M est un fermé, $\operatorname{dist}(y.M) = \inf_{m\in M} \|y - m\| =: \alpha > 0$. Il existe un $m_\varepsilon \in M$ tel que $\|y - m_\varepsilon\| \leqslant \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Le vecteur $x_\varepsilon := (y - -m_\varepsilon)/\|y-m_\varepsilon\|$ staisfait $\|x_\varepsilon\| = 1$ et

$$\|x_\varepsilon - m\| = \|y - m_\varepsilon\|^{-1} \|y - m_\varepsilon - \|y - m_\varepsilon\| \, m\| \geqslant \|y - m_\varepsilon\|^{-1}\alpha \geqslant \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{-1} = 1 - \varepsilon.$$

$\square$

Corollaire 1.2 *Supposons qu'il existe une suite de sous-espaces vectoriels fermés $\{M_n\}$ d'un e.v.n. E telle que $M_n \subset M_{n+1}$ et $M_n \neq M_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors, il existe une suite $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que*

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(y_{n+1}, M_n) \geqslant 1/2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Preuve. Il s'agit de l'application directe du théorème précédent avec $\varepsilon = 1/2$. $\square$

Théorème 1.6 *Un e.v.n. E est de dimension finie ssi la boule unité $B_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ est un compact.*

Preuve. Si E est de dimension finie il est facile de voir que B_E est un compact (comme dans la Proposition 1.9). Supposons maintenant que B_E est un compact dans un espace de dimension infinie E. D'après le corollaire précédent on peut trouver une suite $\{y_n\}$ telle que $\|y_n\| = 1$ et $\|y_m - y_n\| \geqslant 1/2$ pour $m > n$. Cela contredit l'hypotèse que B_E est un compact. $\square$

1.2 Espaces de Hilbert

1.2.1 Espaces pre-hilbertiens

Définition 1.4 *Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une fonction scalaire $(\cdot,\cdot)$ sur $E \times E$ telle que*

a) $\forall y \in E$, *l'application* $x \mapsto (x, y)$ *est linéaire ;*

b) $\overline{(x, y)} = (y, x)$, $\forall x, y \in E$ *;*

c) $(x, x) \geqslant 0$, $\forall x \in E$ *et* $(x, x) = 0$ *ssi* $x = 0$.

Remarque : D'après a), $(0, y) = 0$, $\forall y \in E$ et d'après b) $(y, 0) = 0$, $\forall y \in E$.

Théorème 1.7

1. *(inégalité de Cauchy-Schwarz)* $\forall x, y \in E$, $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$ *;*
2. *L'application* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *définie par* $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ *est une norme sur E.*

Preuve. 1) Si $(y, y) = 0$, alors $y = 0$ et l'égalité est vérifiée. Si $(y, y) > 0$, on peut écrire

$$0 \leqslant (x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y, x - \frac{(x, y)}{(y, y)}y) = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) $\|x\| = \sqrt{(x, x)} \geqslant 0$ et $\|x\| = 0$ ssi $(x, x) = 0$ ssi $x = 0$.

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) &= (x, x) + 2\mathrm{Re}(x, y) + (y, y) \\ \leqslant (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) &\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) \\ &= (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

$\square$

Remarques : 1) $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ est une fonctionnelle continue sur l'espace normé produit $E \times E$.

2) $\forall y \in E$ fixé, $x \mapsto (x, y)$ est une fonctionnelle continue sur E car $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(y, y)}\|x\|$.

Définition 1.5 *Un espace de Banach E est un espace de Hilbert s'il existe un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ sur $E \times E$ tel que la norme de l'espace de Banach satisfait $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.*

Définition 1.6 *Un e.v.n. est un espace pre-hilbertien si sa norme satisfait l'égalité du parallélogramme*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1.3}$$

Proposition 1.10 *Tout espace de Hilbert est pre-hilbertien.*

Preuve. On peut écrire

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y)\\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).\end{aligned}$$

□

Théorème 1.8 *(Fréchet, von Neumann, Jordan)*
Soit E un e.v.n. pre-hilbertien réel. Alors

$$(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{1.4}$$

est un produit scalaire sur E qui donne la même norme sur E. En particulier, si E est un espace de Banach, il est un espace de Hilbert.

Preuve. Il est clair que $(x,y) = (y,x)_1$ et $(x,x) = \|x\|^2$. On peut écrire, d'après (1.4) et (1.3)

$$\begin{aligned}(x,y) + (x',y) &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x'-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+x'}{2} + y\right\|^2 - \left\|\frac{x+x'}{2} - y\right\|^2\right) = 2\left(\frac{x+x'}{2}, y\right).\end{aligned}$$

Si on prend $x' = 0$, on trouve $(x,y) = 2(\frac{x}{2}, y)$, puisque $(0,y) = 0$ d'après (1.4). Cela implique en particulier, $(x,y) + (x',y) = (x+x', y)$ d'après le calcul précédent. De plus la relation $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ est vraie pour tout rationnel α de la forme ${}^m/_{2^n}$. Mais pour un espace normé les applications $\alpha \mapsto \|\alpha x + y\|$ et $\alpha \mapsto \|\alpha x - y\|$ sont continues. Donc, encore une une fois d'après (1.4), l'égalité $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Théorème 1.9 *(von Neumann, Jordan)*
Soit E un e.v.n. pre-hilbertien complexe. Alors

$$(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \tag{1.5}$$

est un produit scalaire sur E qui donne la même norme sur E. En particulier, si E est un espace de Banach, il est un espace de Hilbert.

Preuve. Notons dans cette démonstration le produit scalaire (1.4) du thórème précédent par $(\cdot,\cdot)_1$. Alors d'après (1.5) s'écrit

$$(x,y) = (x,y)_1 + i(x,iy)_1.$$

Il est clair que E est pre-hilbertien réel donc $(x,y) + (x',y) = (x+x', y)$ et $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ sont vraies pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vérifions $(y,x) = \overline{(x,y)}$. Mais, d'après (1.4)

$$(y,x)_1 = (x,y)_1 \quad \text{et} \quad (ix,iy)_1 = (x,y)_1.$$

On déduit $(y,ix)_1 = (-iiy,ix)_1 = -(iy,x)_1 = -(x,iy)_1$. Ainsi

$$(y,x) = (y,x)_1 + i(y,ix)_1 = (x,y)_1 - i(x,iy)_1 = \overline{(x,y)}.$$

Vérifions $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$. De la même façon on a

$$(ix,y) = (ix,y)_1 + i(ix,iy)_1 = -(x,iy)_1 + i(x,y)_1 = i(x,y)$$

et alors $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Enfin, vérifions que $\|x\|^2 = (x,x)$. Mais

$$(x,x)_1 = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad (x,ix)_1 = \frac{1}{4}(|1+i|^2 - |1-i|^2)\|x\|^2 = 0.$$

□

Remarque : ℓ_2^d, ℓ_2 et $\mathrm{L}^2([0,1])$ sont des espaces de Hilbert car pre-hilbertiens.

1.2.2 Projection orthogonale

Définition 1.7 *Soit E un espace de Hilbert et $x,y \in E$. On dit que x est* orthogonal *à y si $(x,y) = 0$ et on note $x \perp y$. Soit $M \subset E$. On dit que x est* orthogonal *à M, et on note $x \perp M$, si $x \perp m$, $\forall m \in M$. Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. On note $M^\perp = \{x \in E : x \perp M\}$ le complément orthogonal de M.*

Proposition 1.11 *Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert E. Alors $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.*

Preuve. Les deux propriétés de $M^\perp$ sont des conséquences de la linéarité de $x \mapsto (x,y)$ et de la continuité du produit scalaire. □

Théorème 1.10 *(de Riesz de décomposition)*
Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Tout vecteur $x \in E$ peut être décomposé de manière unique sous la forme

$$x = m + p, \quad \text{où} \quad m \in M, p \in M^\perp. \tag{1.6}$$

L'élément m est la projection orthogonale de x sur M et sera noté $P_M x$. P_M est appelé opérateur de projection sur M. Ainsi

$$x = P_M x + P_{M^\perp} x \quad \text{ou encore} \quad I = P_M + P_{M^\perp}. \tag{1.7}$$

Preuve. L'unicité de la décompostion (1.6) est claire puisque $x \perp x$ ssi $x = 0$. Il reste à montrer l'exsitence de cette décompostion.

Nous allons supposer que $M \neq E$. Si $x \in M$ la décompostion est triviale avec $m = x$ et $n = 0$. Nous supposons maintenant $x \notin E$ et comme M est un fermé on a que $d = \operatorname{dist}(x,M) = \inf\{\|x-m\| : m \in M\} > 0$. Pour chaque $n \geqslant 1$, soit $m_n \in M$ tels que $\|x - m_n\|^2 < d^2 + {}^1\!/n$.

Alors $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy. En effet, d'après l'égalité du parallélogramme pour $x - m_n$ et $x - m_k$ on a

$$\begin{aligned}\|m_n - m_k\|^2 &= 2\left(\|x - m_n\|^2 + \|x - m_k\|^2\right) - \|2x - (m_n + m_k)\|^2 \\ &= 2\left(\|x - m_n\|^2 + \|x - m_k\|^2\right) - 4\|x - {}^{(m_n+m_k)}/_2\|^2 \\ &\leqslant 2\left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{k} - 2d^2\right) = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

puisque ${}^{(m_n+m_k)}/_2 \in M$. On déduit que $\|m_n - m_k\| \to 0$, lorsque $n, k \to \infty$ et comme E est un espace de Hilbert, il existe $m \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty} m_n = m$. De plus $m \in M$ car M est un fermé. Enfin, par la continuité de la norme on a que $\|x - m\| = d$, autrement dit m est le plus proche élément de x dans M.

On écrit $x = m + (x - m)$ et on pose $p = x - m$. Montrons que $p \in M^\perp$. Pour tout autre $m' \in M$ et tout réel α, on a $m + \alpha m' \in M$. Alors

$$d^2 \leqslant \|x - m - \alpha m'\|^2 = (n - \alpha m', p - \alpha m') = \|p\|^2 - \alpha(p, m') - \alpha(m', p) + \alpha^2\|m'\|^2.$$

Comme $\|p\| = d$, on trouve, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant -2\alpha \mathrm{Re}(p, m') + \alpha^2\|m'\|^2$. On déduit que $\mathrm{Re}(p, m') = 0$, $\forall m' \in M$. Si on remplace m' par im' on trouve que $\mathrm{Im}(p, m') = 0$ et donc $(p, m') = 0$, $\forall m' \in M$. $\square$

Corollaire 1.3 *Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Alors $M = (M^\perp)^\perp$.*

Preuve. Notons dans cette preuve $M^\perp = F$. Si $x \in M$ et $y \in F$ est quelconque, alors $(x, y) = 0$, donc $x \in F^\perp$, autrement dit $x \in (M^\perp)^\perp$. Si $x \notin M$ alors dans sa decomposition (1.6) $x = m + p$, on a $p \neq 0$ avec $p \in F$. On déduit $(x, p) = (m + p, p) = (m, p) + (p, p) = \|p\|^2 \neq 0$, donc $x \notin F^\perp$. $\square$

Proposition 1.12 *Soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Alors, l'opérateur de projection est un opérateur linéaire borné satisfaisant $P_M = P_M^2$ et $(P_M x, y) = (x, P_M y)$, $\forall x, y \in M$. Reciproquement, un opérateur linéaire borné P défini sur un espace de Hilbert E à valeurs dans E, satisfaisant $P = P^2$ et $(Px, y) = (x, Py)$, $\forall x, y \in M$.*

Preuve. Il est clair que pour tout $x \in E$, $P_M(P_M x) = P_M m = m$, d'après (1.6). D'autre part, il est clair que $P_M x \perp P_{M^\perp} y$ donc, par (1.7)

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_M y + P_{M^\perp} y) = (P_M x, P_M y) = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M y) = (x, P_M y).$$

Montrons que P_M est un opérateur linéaire. Soient $x = m+p$ et $x' = m'+p'$ les décompositions (1.6). Alors $x + x' = (m + m') + (p + p')$ avec $m + m' \in M$ et $p + p' \in M^\perp$. Comme la décomposition est unique on conclut que $P_M(x + x') = P_M x + P_M x'$. De la même façon on vérifie que $P_M(\alpha x) = \alpha P_M x$. Enfin, montrons que P_M est un opérateur borné :

$$\|x\|^2 = \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M x + P_{M^\perp} x) = \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 \geqslant \|P_M x\|^2.$$

En particulier on a $\|P_M\| \leqslant 1$.

Réciproquement, soit P un opérateur ayant les propriétés de l'énoncé. P étant linéaire $M = R(P)$ est un sous-espace vectoriel. De plus, $x \in M$ équivaut à l'existence de $y \in E$ tel que $x = Py = P^2y = Px$, autrement dit $x \in M \Leftrightarrow x = Px$. D'après cette égalité et par la continuité de P on déduit que M est un fermé. Vérifions que $P = P_M$. Si $x \in M$ on a $Px = x = P_M x$. Si $y \in M^\perp$, on a $P_M y = 0$. De plus, $(Py, Py) = (y, P^2y) = (y, Py) = 0$, donc $Py = 0 = P_M y$. Quand x est quelconque dans E, on déduit d'après ce qui précéde

$$Px = P(P_M x + P_{M^\perp} x) = PP_M x + PP_{M^\perp} x = P_M x + 0 = P_M x.$$

□

Proposition 1.13 *Soit $P : E \to E$ un opérateur linéaire borné sur l'espace de Hilbert E. Alors P est un opérateur de projection ssi $P = P^2$ et $\|P\| \leqslant 1$.*

Preuve. Il suffit de montrer que P est un opérateur de projection lorsque $P = P^2$ et $\|P\| \leqslant 1$. On pose $M = R(P)$ et $N = N(P)$. Comme dans la démonstration précédente M est un sous-espace vectoriel fermé et $x \in M \Leftrightarrow x = Px$. Comme P est linéaire continu, N est aussi un sous-espace vectoriel fermé. On décompose $x = Px + (I - P)x$ et on remarque que $Px \in M$ et $(I - P)x \in N$ puisque $P(I - P) = P - P^2 = 0$.

Montrons que $N = M^\perp$. Pour tout $x \in E$, $y := Px - x \in N$. En particulier, si $x \in N^\perp$ $Px = x + y$ avec $(x, y) = 0$. Alors $\|x\|^2 \geqslant \|Px\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ce qui implique $y = 0$, autrement dit $x = Px$ ou encore $x \in M$. Inversement, soit $z \in M \Leftrightarrow z = Pz$. On écrit $z = y + x$ avec $y \in N$ et $x \in N^\perp$. Mais alors $z = Pz = Py + Px = Px = x$ (car $N^\perp \subset M$). On a obtenu que $M \subset N^\perp$, donc $M = N^\perp$ ou encore $N = (N^\perp)^\perp = M^\perp$. □

1.2.3 Ensembles orthonormaux

Définition 1.8 *Un ensemble S de vecteurs d'un espace pre-hilbertien E est dit* orthogonal *si $x \perp y$ quelque soit $x \neq y$ vecteurs de S. Si de plus $\|x\| = 1$, alors S est dit* ensemble orthonormal. *Un ensemble orthonomal S d'un espace de Hilbert E est dit* système orthonormal *complet (s.o.c.) s'il n'y a pas un autre ensemble orthonormal dans E contenant S comme sous-ensemble strict.*

Théorème 1.11 (résultat admis) *(existence d'un s.o.c.)*
Tout espace de Hilbert $E \neq \{0\}$ contient au moins un s.o.c. De plus, si S est un ensemble orthonomal, il existe un s.o.c. contenant S comme sous-ensemble.

Théorème 1.12 *Soit $S := \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un s.o.c. d'un espace de Hilbert E. Pour tout $f \in E$ on définit les* coefficients de Fourier *(par rapport à S)*

$$f_\lambda = (f, e_\lambda).$$

*Alors l'*identité de Parseval *est vérifiée :*

$$\|f\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^2. \tag{1.8}$$

Preuve. D'abord nous allons démontrer L"*inégalité de Bessel*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{1.9}$$

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ un ensemble quelconque fini d'indices λ. Pour toute famille finie $c_{\lambda_1}, \ldots, c_{\lambda_n}$ de nombres complexes on a, par orthogonalité des $\{e_\lambda\}$

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_{\lambda_j} e_{\lambda_j} \right\|^2 &= (f - \sum_{j=1}^{n} c_{\lambda_j} e_{\lambda_j}, f - \sum_{j=1}^{n} c_{\lambda_j} e_{\lambda_j}) \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_{\lambda_j} \bar{f}_{\lambda_j} - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{\lambda_j} f_{\lambda_j} + \sum_{j=1}^{n} |c_{\lambda_j}|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_{\lambda_j}|^2 + \sum_{j=1}^{n} |f_{\lambda_j} - c_{\lambda_j}|^2.\end{aligned}$$

Alors, lorsque les indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont fixés, le minimum de $\|f - \sum_{j=1}^{n} c_{\lambda_j} e_{\lambda_j}\|^2$ est atteint quand $c_{\lambda_j} = f_{\lambda_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. On a trouvé

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j} \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_{\lambda_j}|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} |f_{\lambda_j}|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{1.10}$$

Comme les indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont arbitraires on déduit que $f_\lambda =\neq 0$ pour au plus un nombre dénombrable d'indices λ, disons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$. En effet, pour chaque entier $n \geqslant 1$, le nombre d'indices λ pour lesquels $|f_\lambda| > 1/n$ est fini (tout au plus $n^2\|f\|^2$). De plus l'inégalité (1.9) est vérifiée.

Montrons que la suite $\{\sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j}\}_{n\geqslant 1}$ est convergente. On va montrer qu'elle est de Cauchy. En effet, si $m < n$

$$\left\| \sum_{j=m}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j} \right\|^2 = (\sum_{j=m}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j}, \sum_{j=m}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j}) = \sum_{j=m}^{n} |f_{\lambda_j}|^2$$

qui tend vers zéro, lorsque $m, n \to \infty$. On pose $f' = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j}$.

Montrons que $f - f' = 0$. Nous allons montrer que $f - f'$ est orthogonal à S. D'après la continuité du produit scalaire on a

$$(f - f', e_{\lambda_j}) = \lim_{n\to\infty} (f - \sum_{k=1}^{n} f_{\lambda_k} e_{\lambda_k}, e_{\lambda_j}) = f_{\lambda_j} - f_{\lambda_j} = 0,$$

et si $\lambda \neq \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n, \ldots)$

$$(f - f', e_\lambda) = \lim_{n\to\infty} (f - \sum_{k=1}^{n} f_{\lambda_k} e_{\lambda_k}, e_\lambda) = 0 - 0 = 0.$$

Comme $S = \{e_\lambda\}$ est un s.o.c. on déduit que $f - f' = 0$ et donc $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j}$. D'aprèsla continuité de la norme on trouve

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j} \right\|^2 = \|f\|^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |f_{\lambda_j}|^2 = \|f\|^2 - \sum_{\lambda\in\Lambda} |f_\lambda|^2.$$

$\square$

Corollaire 1.4 *On a le développement en série de Fourier*

$$f = \sum_{j \geqslant 1} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} e_{\lambda_j}. \tag{1.11}$$

Corollaire 1.5 *Tout espace de Hilbert est isomorphe et isométrique à l'espace* $\mathrm{L}^2(\Lambda, \mathcal{A}, m)$ *où* m *est la mesure de comptage sur* Λ*,* $m(\{\lambda\}) = 1$*, avec*

$$E \ni f \leftrightarrow \{f_\lambda\} \in \mathrm{L}^2(\Lambda, m)$$

au sens où $f + g \leftrightarrow \{f_\lambda + g_\lambda\}$*,* $\alpha f \leftrightarrow \{\alpha f_\lambda\}$ *et* $\|f\|^2 = \|\{f_\lambda\}\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^2$*.*

Théorème 1.13 *(procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)*
Étant donnée une famille au plus dénombrable de vecteurs $\{x_n\}$ *linéairement indépendants d'un espace pre-hilbertien, on peut construire un ensemble orthonormal ayant le même cardinal que* $\{x_n\}$ *et qui engendre le même sous-espace vectoriel que* $\{x_n\}$*.*

Preuve. On peu toujours supposer que $x_1 \neq 0$. On va construire $y_1, y_2, \ldots$ et $u_1, u_2, \ldots$ par réccurence :

$$y_1 = x_1, \quad u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|},$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, u_1)u_1, \quad u_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|},$$

...

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (x_{n+1}, u_j)u_j, \quad u_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|},$$

...

Ce procédé se termine si $\{x_n\}$ est un ensemble fini. Sinon, il continue indéfinement. Il est clair que $y_n \neq 0$ à cause de l'indépendance linéaire de $x_1, \ldots, x_n$. Ainsi u_n est bien défini. Par récurrence, il est clair que chaque u_n est une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$ et que chaque x_n est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$. Ainsi le sous-espace vectoriel engendré par les u est le même que celui engendreé par les x.

Par calcul : $\|u_1\| = 1$ et que $y_2 \perp u_1$, donc $u_2 \perp u_1$. De même, $\|u_1\| = 1$, $y_3 \perp u_1$, donc $u_3 \perp u_1$. Ainsi, en répétant l'argument u_1 est orthogonal à $u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$. De la même façon $\|u_2\| = 1$, $y_3 \perp u_2$, donc $u_3 \perp u_2$. En répétant l'argument, on conclut que $u_k \perp u_\ell$, lorsque $k > \ell$. Ainsi $\{u_n\}$ est un ensemble orthonormal. □

Corollaire 1.6 *Soit* E *un espace de Hilbert séparable. Alors* E *admet un s.o.c. au plus dénombrable.*

Preuve. Supposons que $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ est une suite de vecteurs de E dense dans E. Soit x_1 le premier élément non-nul de $\{a_n\}$, x_2 le premier a_j qui ne se trouve pas dans le sous-espace vectoriel fermé engendré par x_1, etc x_n le premier a_j qui ne se trouve pas dans le sous-espace vectoriel fermé engendré par $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Il est alors clair que les a et les x engendrent le même sous-espace vectoriel fermé de E et, en fait, ce sous-espace est l'espace entier E à cause de la densité de $\{a_n\}$. Si on applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à $\{x_n\}$ on obtient $\{u_n\}$ un système orthonormal au plus dénombrable et qui engendre E tout entier.

L'ensemble orthonormal $\{u_n\}$ est complet car sinon, il existerait $0 \neq u \perp u_n$, pour tout n, donc u est orthogonal à tout E. $\square$

Remarque : Soit $E = \mathrm{L}^2(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\mu)$. On orthogonalise l'ensemble des monômes

$$1, s, s^2, s^3, \ldots$$

et on trouve les *polynômes orthogonaux de Tchebytchev* :

$$P_0(s) = \text{cste.}, P_1(s), \ldots$$

tels que

$$\int_a^b P_j(s)P_k(s)\mu(ds) = \delta_{jk}, \quad j,k \geqslant 1.$$

Cas particuliers : $a = -1, b = 1, \mu(ds) = ds$ les *polynômes de Legendre*, $a = -\infty, b = \infty, \mu(ds) = e^{-s^2}ds$ les *polynômes de Hermite*, $a = 0, b = \infty, \mu(ds) = e^{-s}ds$ les *polynômes de Laguerre*.

1.2.4 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 1.14 *(de Fisher-Riesz de représentation)*
Soit E un espace de Hilbert et f une fonctionnelle linéaire bornée sur E. Alors il existe un unique vecteur $y_f \in E$ tel que

$$f(x) = (x, y_f), \forall x \in E, \quad \textit{et} \quad \|f\| = \|y_f\|. \tag{1.12}$$

Réciproquement,, tout vecteur $y \in E$ définit une fonctionnelle linéaire bornée f_y sur E par

$$f_y(x) = (x, y), \forall x \in E, \quad \textit{et} \quad \|f_y\| = \|y\|. \tag{1.13}$$

Preuve. L'unicité de y_f est claire puisque $(x,z) = 0$, $\forall x \in E$, implique $z = 0$. Montrons l'existence. On notera dans cette démonstration $N = N(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$. Comme f est linéaire continue, N est un sous-espace vectoriel fermé. Le résultat est trivial si $N = E$ car dans ce cas on prend $y_f = 0$. Supposons que $N \neq E$. Alors, d'après le théorème de Riesz de décomposition 1.10 il existe un $y_0 \neq 0$ appartenant à $N^\perp$. On pose

$$y_f := \overline{\frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2}}\, y_0$$

et nous allons montrer qu'il satisfait les conditions du théorème.

Si $x \in N$, alors $f(x) = 0 = (x, y_f)$. Par ailleurs, si $x = \alpha y_0$, alors

$$(x, y_f) = (\alpha y_0, y_f) = (\alpha y_0, \overline{\frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2}}\, y_0) = \alpha f(y_0) = f(\alpha y_0) = f(x).$$

Puisque $f(x)$ et (x, y_f) sont des applications linéaires en x, légalité $f(x) = (x, y_f)$, $\forall x \in E$ sera vérifiée dès que l'on montre que E est engendré par N et y_0. En effet, comme $f(y_0) \neq 0$,

$$x = (x - \frac{f(x)}{f(y_f)}\, y_f) + \frac{f(x)}{f(y_f)}\, y_f).$$

Le premier terme au membre de droite est un élément de N car

$$f(x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_f)} f(y_f) = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(x, y_f)| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\|x\| \cdot \|y_f\| = \|y_f\|$$

et aussi

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(\frac{y_f}{\|y_f\|})| = |(\frac{y_f}{\|y_f\|}, y_f)| = \|y_f\|.$$

On a donc obtenu que $\|f\| = \|y_f\|$.

Pour l'autre sens du théorème il suffit de remarquer que $|f_y(x)| = |(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. □

Corollaire 1.7 *Soit E un espace de Hilbert. La totalité $E^\star$ des fonctionnelles linéaires bornées sur E constitue un espace de Hilbert. Il existe une correspondance bijective qui preserve la norme $f \leftrightarrow y_f$ entre $E^\star$ et E. Par cette correspondance on peut identifier $E^\star$ et E en tant qu'ensembles mais pas comme espaces vectoriels puisque*

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \leftrightarrow (\bar{\alpha}_1 f_1 + \bar{\alpha}_2 f_2)$$

lorsque $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Preuve. $E^\star$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2})$. □

Corollaire 1.8 *Toute fonctionnelle linéaire continue T sur $E^\star$ est en correspondance bijective à un unique élément $t \in E$ par*

$$T(f) = f(t), \forall f \in E^\star.$$

L'application est une isométrie linéaire.

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tout complexe $\alpha = \bar{\bar{\alpha}}$. □

Définition 1.9 *L'espace $E^\star$ est le dual de E. On peut identifier, au sens du corollaire précédent, E au bidual $(E^\star)^\star$. Cette propriété est la reflexivité des espaces de Hilbert.*

1.3 Exercices

1.1 (quelques rappels d'algèbre)

- **i)** Deux espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.
- **ii)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient M et N deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = M \oplus N$. Alors $\dim E = \dim M + \dim N$.

iii) Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $T \in L(E,F)$ une application linéaire de E dans F. On note

$$N(T) = \{x \in E : Tx = 0\} \quad \text{et} \quad R(T) = \{y \in F : y = Tx, x \in E\}.$$

On considère l'espace quotient $E/N(T)$ et on note ξ_x la classe ayant pour représentant x. Alors l'application Θ définie par $\Theta(\xi_x) = Tx$ est un isomorphisme entre $E/N(T)$ et $R(T)$.

iv) Soit E un espace vectoriel tel que $E = M \oplus N$, avec M et N sous-espaces de E. Alors E/M est isomorphe à N.

v) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et M un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim E/M = \dim E - \dim M$.

vi) Soient E un espace vectoriel et M un sous-espace vectoriel de E. Alors M est de codimension finie d si et seulement si il existe d vecteurs linéairement indépendants $x_1, \ldots, x_d \in E$ tels que tout $x \in E$ admet une unique représentation de la forme $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_d x_d + y$, où $\alpha_1, \ldots \alpha_d \in K$ et $y \in M$.

1.2. Montrer que l'hypothèse de positivité d'une norme peut être retrouvée à partir de toutes les autres hypothèses de la définition d'une norme.

1.3. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

1.4. Soit l'application sur $\mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$$

Montrer que le supremum dans l'expression précédente est un maximum et ensuite qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1.5. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel normé muni de

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x), \quad (\alpha P)(x) = \alpha P(x), \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|dx.$$

Calculer $\|P\|$ ($r \geqslant 1$ entier), pour $P(x) = x^r$.

1.6. (caractérisation des espaces de Banach) Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) E est un espace de Banach ;

ii) toute série absolument convergente est (fortement) convergente ;

ii) pour toute suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ vérifiant $\|x_n\| \leqslant c^n$, avec $0 < c < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est (fortement) convergente.

1.7. Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace fermé de E. Montrer que toutes les classes d'equivalences ξ (modulo M) sont des fermés de E.

1.8. (quelques rappels d'analyse) Soit E un espace vectoriel normé.

i) Montrer que toute suite convergente dans E est de une suite de Cauchy.

ii) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

iii) Montrer que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue (à valeurs dans un autre espace normé F) est une suite de Cauchy.

1.9. (espace produit) Soient E et E' deux espaces de Banach munis respectivement des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$. Sur l'espace produit $E \times E'$ on introduit

$$\|(x, y)\|'' := \|x\| + \|y\|', \quad (x, y) \in E \times E'.$$

Montrer que cette application est une norme sur $E \times E'$ et que cet espace normé est un espace de Banach. Même question avec

$$\|(x, y)\|''' := \max\{\|x\|, \|y\|'\}, \quad (x, y) \in E \times E'.$$

1.10. (espaces $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$) Vérifier que sur $\mathbb{R}^d$, resp. $\mathbb{C}^d$, les quantités suivantes sont des normes

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j|, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leqslant j\leqslant d} |x_j|.$$

Justifier que ces espaces sont des espaces de Banach.

1.11. (espace de fonctions continues) Soit S un espace métrique quelconque. On note par $C(S; \mathbb{R})$, resp. $C(S; \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions continues bornées à valeurs réelles, resp. complexes, définies sur S. Montrer que ces ensembles sont des espaces de Banach avec

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s), \quad (\alpha x)(s) = \alpha x(s), \quad \|x\| := \sup_{s\in S} |x(s)|.$$

La convergence des suites pour cette norme est la convergence uniforme des fonctions sur S.

1.12. Montrer que $\|x\|_2 := (\int_0^1 |x(s)|^2 ds)^{1/2}$ définit une norme sur $C([0, 1]; \mathbb{R})$.

1.13. (espace de fonctions lipschitziennes) Montrer que sur l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$, l'application

$$x \mapsto |x(0)| + \sup_{0\leqslant s<t\leqslant 1} \frac{|x(s) - x(t)|}{|s - t|}$$

est une norme.

1.14. (espace de fonctions dérivables) Soit $E = \{x \in \mathrm{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}) : x(0) = 0\}$, où $\mathrm{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur E :

i) $x \mapsto \sup_{s\in[0,1]} |x(s)|$;

ii) $x \mapsto \sup_{s\in[0,1]} |x'(s)|$;

iii) $x \mapsto (\int_0^1 (|x(s)|^2 + |x'(s)|^2) ds)^{1/2}$.

1.15. (espace des fonctions p-intégrables) Soit $(S, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$. Nous allons noter par $\mathcal{L}^p(S; \mathbb{R})$, resp. $\mathcal{L}^p(S; \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions $x : S \to \mathbb{R}$, resp. $x : S \to \mathbb{C}$, $\mathcal{B}$-mesurables et telle que $|x|^p$ est μ-intégrable sur S.

i) Montrer que ces ensembles sont des espaces vectoriels munis de

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s), \quad (\alpha x)(s) = \alpha x(s).$$

On pose

$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p}.$$

ii) Montrer que $\|x\|_1$ satisfait l'inégalité triangulaire.

iii) Soit $p \in]1, \infty[$ et on note p' l'exposant conjugué de p, défini par $1/p + 1/p' = 1$. Montrer que le minimum de la fonction $f(c) = c^p/p + 1/p' - c$, $c \geqslant 0$, est atteint en $c = 1$ uniquement et calculer ce minimum. En déduire l'*inégalité de Young* : pour tous $a, b \geqslant 0$

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

avec égalité si et seulement si $a = b^{1/(p-1)}$.

iv) Supposons que $A = \|x\|_p$ et $B = \|y\|_{p'}$ sont les deux non-nulles. On pose $a = |x(s)|/A$ et $b = |y(s)|/B$. Utiliser l'inégalité de Young et une intégration pour déduire l'*inégalité de Hölder*

$$\int_S |x(s)y(s)| \mu(ds) \leqslant \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} \left(\int_S |y(s)|^{p'} \mu(ds) \right)^{1/p'}.$$

Montrer que cette inégalité est vraie même si au moins un des A, B s'annule. L'égalité a lieu si et seulement si il existe une constante positive c telle que $|x(s)| = c|y(s)|^{1/(p-1)}$ pour μ-p.t. $s \in S$ (ou $|y(s)| = c|x(s)|^{1/p-1}$ pour μ-p.t. $s \in S$).

v) Montrer que

$$\int_S |x(s) + y(s)|^p \mu(ds) \leqslant \int_S |x(s) + y(s)|^{p-1} |x(s)| \mu(ds) + \int_S |x(s) + y(s)|^{p-1} |y(s)| \mu(ds).$$

Utiliser l'inégalité de Hölder ainsi que le fait que $p'(p-1) = p$ pour déduire l'*inégalité de Minkowski*

$$\left(\int_S |x(s) + y(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p} + \left(\int_S |y(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p}$$

c'est-à-dire l'inégalité triangulaire pour $\| \cdot \|_p$. L'égalité a lieu si et seulement si il existe une constante positive c telle que $x = cy$ μ-p.p. (ou $y = cx$ μ-p.p.)

vi) Montrer que la condition $\|x\|_p = 0$ est équivalente à $x = 0$ μ-p.p. Soit le sous-espace vectoriel M des fonctions nulles μ-p.p. et soit l'espace quotient $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{R})/M$, resp. $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{C})/M$. Montrer que sur cet espace la norme quotient d'une classe de représentant x coïncide avec la norme $\|x\|_p$. Les espaces quotient avec cette norme seront notés $\mathrm{L}^p(S;\mathbb{R})$, resp. $\mathrm{L}^p(S;\mathbb{C})$. Nous allons identifier une fonction à sa classe d'équivalence, pour simplifier.

vii)* On veut montrer que $\mathrm{L}^p(S)$ est un espace de Banach. Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^p(S)$.

(a) Montrer qu'il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ telle que la série

$$\sum_{k\geqslant 1}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

soit absolument convergente.

(b) On note

$$y_r = |x_{n_1}| + \sum_{k=1}^{r} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \in \mathrm{L}^p(S).$$

Utiliser l'inégalité triangulaire et le lemme de Fatou pour vérifier que

$$\int_S \lim_{r\to\infty} y_r(s)^p \mu(ds) < \infty.$$

(c) En déduire que $\lim_{r\to\infty} y_r$ existe finie p.p. et donc $\lim_{r\to\infty} x_{n_{r+1}}$ existe finie p.p. notée x_∞.

(d) Utiliser encore une fois l'inégalité de Fatou pour déduire que

$$\int_S \lim_{r\to\infty} |x_{n_r} - x_{n_k}|^p \mu(ds) \leqslant \left(\sum_{j=k}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\|_p \right)^p .$$

En déduire que $x_\infty - x_{n_k} \in \mathrm{L}^p(S)$ et donc $x_\infty \in \mathrm{L}^p(S)$.

(e) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \|x_\infty - x_{n_k}\|_p = 0$ et que $\limsup_{n\to\infty} \|x_\infty - x_n\|_p = 0$. Conclure.

1.16.* (espace L^∞) Soit $(S, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction mesurable x est dite *essentiellement bornée* s'il existe une constante positive c telle que $|x(s)| \leqslant c$ pour μ-p.t. $s \in S$. L'infimum de toutes ces constantes c est noté $\mathrm{esssup}_{s\in S}|x(s)|$. Comme dans l'exercice précédent on identifie les fonctions égales μ-p.p. (donc avec la classe modulo $M = \{x = 0\, p.p.\}$).

i) Montrer que l'ensemble $\mathrm{L}^\infty(S;\mathbb{R})$, resp. $\mathrm{L}^\infty(S;\mathbb{C})$, des fonction mesurables essentiellement bornées est un espace vectoriel normé muni de

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \quad (\alpha x)(s) = \alpha x(s), \quad \|x\|_\infty := \mathrm{esssup}_{s\in S}|x(s)|.$$

(on définit comme dans l'exercice précédent $\mathrm{L}^\infty(S)$).

ii) Montrer que $\mathrm{L}^\infty(S)$ est un espace de Banach.

iii) On veut montrer que si $\mu(S) < \infty$, alors, pour $x \in \mathrm{L}^\infty(S)$, $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, où $\|\cdot\|_p$ est la norme de $\mathrm{L}^p(S)$.

(a) Montrer que

$$\limsup_{p\to\infty}\left(\int_S |x(s)|^p\mu(ds)\right)^{1/p} \leqslant \mathrm{esssup}_{s\in S}|x(s)|.$$

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable A_ε de mesure $\mu(A_\varepsilon) > 0$ tel que

$$\left(\int_S |x(s)|^p\mu(ds)\right)^{1/p} \geqslant \mu(A_\varepsilon)^{1/p}(\mathrm{esssup}_{s\in S}|x(s)| - \varepsilon).$$

En déduire

$$\liminf_{p\to\infty}\left(\int_S |x(s)|^p\mu(ds)\right)^{1/p} \geqslant (\mathrm{esssup}_{s\in S}|x(s)| - \varepsilon).$$

1.17.

i) On considère l'ensemble ℓ_∞ de suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ bornées (on peut regarder x comme une application de $S = \{1, 2, \ldots\}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $x(j) = u_j$). Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé muni de

$$(x + y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{j\geqslant 1}|x(j)| = \sup_{j\geqslant 1}|u_j|.$$

Montrer ensuite que $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

ii) Montrer que l'ensemble des suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que $\lim_{j\to\infty} u_j$ existe constitue un espace vectoriel normé, noté c avec

$$(x + y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1}|x(n)| = \sup_{n\geqslant 1}|u_n|$$

et c'est un espace de Banach.

iii) Montrer que l'ensemble de toutes les suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que $\lim_{j\to\infty} u_j = 0$ existe constitue un espace vectoriel normé, noté c_0 avec

$$(x + y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1}|x(n)| = \sup_{n\geqslant 1}|u_n|$$

et c'est un espace de Banach.

iv) Montrer que l'ensemble de toutes les suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que $\mathrm{supp}(x) = \mathrm{supp}(u_j)$ est fini (ici $\mathrm{supp}(u_j) = \{j \geqslant 1 : u_j \neq 0\}$ est le support d'une suite) constitue un espace vectoriel normé, noté c_{00} avec

$$(x + y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 1}|x(n)| = \sup_{n\geqslant 1}|u_n|$$

et ce n'est pas un espace de Banach.

v) Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que l'ensemble de toutes les suites $x = (u_j)_{j\geqslant 1}$ tels que la série $\sum_{j\geqslant 1}|u_j|^p < \infty$ constitue un espace vectoriel normé, noté ℓ_p avec

$$(x + y)(j) = x(j) + y(j), \quad (\alpha x)(j) = \alpha x(j), \quad j \geqslant 1, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{j\geqslant 1}|x(j)|^p\right)^{1/p}.$$

et c'est un espace de Banach.

1.18. Soient $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Montrer que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ pour $x \in \ell_p$ mais que $\|x\|_p \leqslant \|x\|_q$ pour $x \in \mathrm{L}^q([0,1])$. En déduire que $\ell_p \subset \ell_q$ et $\mathrm{L}^q([0,1]) \subset \mathrm{L}^p([0,1])$ et que les opérateurs identité correspondants ont la norme 1.

1.19.

i) Si $x \in \mathrm{L}^{p_0}([0,1])$ pour un $p_0 > 1$, montrer que $\lim_{p \downarrow 1} \|x\|_p = \|x\|_1$.

ii) Montrer que si $x \in \mathrm{L}^\infty([0,1])$ alors $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

iii) Si $x \in \ell_q$ pour un certain $q \geqslant 1$, montrer que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

1.20. (séparabilité) Montrer que

i) si $p \in [1, \infty[$, ℓ_p est séparable ;

ii) c et c_0 sont séparables ;

iii)* ℓ_∞ n'est pas séparable ;

iv) $C([0,1])$ est séparable ;

v) si $p \in [1, \infty[$, $\mathrm{L}^p([0,1])$ est séparable ;

vi) $\mathrm{L}^\infty([0,1])$ n'est pas séparable.

1.21. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, il existe une isométrie linéaire entre ℓ_p et un sous-espace de $\mathrm{L}^p([0,1])$.

1.22. Une propriété $\mathcal{P}$ est dite *propriété des trois espaces* si la phrase suivante est vraie : pour un sous-espace M fermé d'un espace vectoriel normé E, si M et E/M ont la propriété $\mathcal{P}$, alors E a la propriété $\mathcal{P}$.

i) Montrer que la propriété d'être un espace complet est une "propriété des trois espaces" ;

ii) Montrer que la propriété d'être un espace séparable est une "propriété des trois espaces".

1.23. Soient M, N deux sous-espaces d'un espace de Banach E telles que M et N soient isomorphes. E/M et E/N sont-elles isomorphes ? On pourra considérer ℓ_2, $\{(0, u_2, u_3, \ldots)\}$ et $\{(0, 0, u_3, \ldots)\}$.

1.24. Soit $x = (u_j) \in \ell_\infty$ et le sous-espace c_0. Montrer que $\mathrm{dist}(x, c_0) = \limsup_{j\to\infty} |u_j|$. En déduire que la norme sur ℓ_∞/c_0 est $\|\xi_x\| = \limsup_{j\to\infty} |u_j|$, où ξ_x est la classe de représentant $x = (u_j)$.

1.25. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. On note $B_j = \{x \in E : \|x\|_j \leqslant 1\}$, $j = 1, 2$ les boules unité pour les deux normes.

i) Montrer que $\|x\|_1 \leqslant c\,\|x\|_2$, $\forall x \in E$ $(c > 0)$ si et seulement si $\frac{1}{c} B_2 \subset B_1$.

ii) Montrer que si les normes sont équivalents alors B_1 et B_2 sont homéomorphes.

1.26. Soit $T \in B(E, F)$, où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

1.27. Soit $T \in L(E, F)$, où E, F sont deux espaces vectoriels normés. On suppose que $\{Tx_n\}_{n\geqslant 1}$ est bornée pour chaque suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que $\|x_n\| \to 0$, quand $n \to \infty$. T est-il nécéssairement continu ?

1.28. Soit $T \in B(E, F)$, où E, F sont deux espaces de Banach. Montrer que s'il existe $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geqslant \delta\|x\|$, $\forall x \in E$, alors $R(T)$ est un espace de Banach. De plus T est un isomorphisme de E dans F.

1.29. Soit $T \in B(E, F)$, où E, F sont deux espaces vectoriels normés. On suppose que T est bijective. Dans E on note $B_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ et $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ et de même dans F, B_F, S_F. Les affirmations suivantes sont equivalentes :

- **i)** T est une isométrie de E sur F ;
- **ii)** $T(B_E) = B_F$;
- **iii)** $T(S_E) = S_F$;
- **iv)** $T(\mathring{B}_E) = \mathring{B}_F$.

1.30. Montrer qu'un espace de Banach est séparable si et seulement si $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ est séparable.

1.31. Montrer que l'espace normé $\mathrm{L}^2(S; \mathbb{K})$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(x, y) := \int_S x(s)\overline{y(s)}\mu(ds).$$

Montrer que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ est un système orthonormal complet de l'espace $\mathrm{L}^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$.

1.32. Montrer que l'espace normé ℓ_2 est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(x, y) = ((u_j), (v_j)) := \sum_{j\geqslant 1} u_j\overline{v_j}.$$

1.33. Montrer que l'espace normé $\mathrm{C}^1(]0, 1[; \mathbb{R})$ avec la norme $\|x\| := (\int_0^1 (|x(s)|^2 + |x'(s)|^2)ds)^{1/2}$ est un espace prehilbertien dont on indiquera le produit scalaire.

1.34. Soit E un espace de Hilbert. Montrer que $\|\cdot\|$ satisfait l'égalité du parallélogramme généralisée

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \left\| \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j x_j \right\|^2 = 2^r \sum_{j=1}^{r} \|x_j\|^2.$$

1.35. Montrer que dans $E = \ell_2$ l'orthogonal du sous-espace des suites ayant le support fini est $\{0\}$. On pourra considérer une base orthonormée $\{e_n\}$ et calculer (x, e_n) pour $n \in \operatorname{supp}(x)$ et $x \in E$. Commenter le résultat.

1.36. Soit $\{e_n\}$ une suite orthonormée dans ℓ_2, $e_n = (u_j^n)$. Montrer que pour tout $j \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} u_j^n = 0$.

1.37. Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée. On pose, pour $x = \sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$, $\|x\|_0 := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}|x_n|$. Montrer que $\|\cdot\|_0$ est une norme qui n'est pas équivalente à la norme de E.

1.38. Soit $A := \{x = (u_j) \in \ell_2 : \sum_{j\geqslant 1}(1 + \frac{1}{j})u_j^2 \leqslant 1\}$. Montrer que A est un fermé borné mais ne contient pas un élément de norme égale au $\sup\{\|x\| : x \in A\}$.

1.39.* Le cube de Hilbert est défini par $C := \{x = (u_j) \in \ell_2 : \forall j \geqslant 1, |u_j| \leqslant 2^{-j}\}$. Montrer que C est un compact de ℓ_2.

1.40. (l'espace de Hardy-Lebesgue) Soit HL^2 l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes qui sont holomorphes dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et telles que

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Montrer que HL^2 est un espace prehilbertien avec la norme

$$\|f\| := \sup_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)\right]^{1/2}$$

qui est isomorphe à ℓ_2 (ainsi HL^2 est un espace de Hilbert). On pourra remarquer que $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} c_j z^j$ et calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$. Ensuite, étant donné $(c_j) \in \ell_2$, montrer que la fonction $z \mapsto \sum_{j\geqslant 0} c_j z^j$ appartient à HL^2.

Chapitre 2

Théorèmes de Banach et conséquences

2.1 Étude de l'espace $B(E, F)$

2.1.1 Théorèmes de Banach

Théorème 2.1 *(de Baire)*
Soit E un espace de Banach tel que $E = \cup_{n\geqslant 1} A_n$ avec A_n fermé. Alors il existe $n_0 \geqslant 1$ entier tel que $\mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset$. Autrement dit, une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

Preuve. Supposons le contraire, que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathring{A}_n = \emptyset$, autrement dit $\overline{A_n^c} = E$, ou encore, que tout A_n^c est dense dans E.

Il existe $B_1 := \{x : \|x - x_1\| \leqslant r_1\} \subset A_1^c$ avec $0 < r_1 < 1/2$ et avec x_1 qui peut être choisi aussi proche que l'on veut de tout point de E. Par densité de A_2^c, l'ouvert $A_2^c \cap \mathring{B}_1$ n'est pas vide donc il existe $B_2 := \{x : \|x - x_2\| \leqslant r_2\} \subset A_2^c \cap \mathring{B}_1$ avec $0 < r_2 < 1/2^2$. En rpétant l'argument on obtient une suite $\{B_n\}$ de boules fermés, $B_n := \{x : \|x - x_n\| \leqslant r_n\}$ avec $0 < r_n < 1/2^n$, $B_{n+1} \subset B_n$ et $B_n \cap A_n = \emptyset$, pour tous $n \geqslant 1$.

La suite des centres $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy puisque, $\forall n < m$, $x_m \in B_n$ et $\|x_n - x_m\| \leqslant r_n < 1/2^n \to 0$, lorsque $n \to \infty$. Soit $x_\infty \in E$ la limite de x_n (E étant complet l'existence d'un tel x_∞ est garantie). On a, si $n < m$, $\|x_n - x_\infty\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|x_m - x_\infty\| \leqslant r_n + \|x_m - x_\infty\| \to r_n$, lorsque $m \to \infty$ et cela pour tout $n \geqslant 1$. C'est-à-dire que $x_\infty \in B_n$, $\forall n \geqslant 1$, donc $x_{infty} \notin A_n$, $\forall n \geqslant 1$, ou encore $x_\infty \notin \cup_{n\geqslant 1} A_n = E$, ce qui est absurde. $\square$

Définition 2.1 *Soit $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset B(E, F)$ une famille d'opérateurs linéaires continus entre deux e.v.n. On dit que la famille est ponctuellement bornée si $\forall x \in E$, il existe $C_x > 0$ tels que $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| \leqslant C_x$. On dit que la famille est bornée s'il existe $C > 0$ tel que $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| \leqslant C$.*

Remarque : Il est clair qu'une famille bornée est ponctuellement bornée, car $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| \leqslant C\|x\|$, $\forall x \in E$. Le résultat suivant donne la réponse inverse.

Théorème 2.2 *(de Banach-Steinhaus, principe de la borne uniforme)*
Soit E un espace de Banach et F un e.v.n. Soit $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset B(E, F)$ une famille

d'opérateurs linéaires continus. Si la famille est ponctuellement bornée, alors la famille est bornée.

Preuve. On pose $A_n = \cap_{\lambda\in\Lambda}\{x \in E : \|T_\lambda x\| \leqslant n\}$. Il s'agit d'un fermé en tant qu'intersections de fermés (les opérateurs sont continus). Soit $x \in E$ quelconque. D'après l'hypothèse, il existe $n_x \geqslant 1$ tel que $\|T_\lambda x\| \leqslant n_x$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc $x \in A_{n_x}$. Autrement dit $E = \cup_{n\geqslant 1} A_n$.

D'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que A_{n_0} contient un ouvert. Ainsi, il existe un centre $x_0 \in E$ et un rayon $r > 0$ tels que la boule $B_E(x_0, r) \subset A_{n_0}$. Puisque $B_E(x_0, r) = x_0 + rB_E$, pour tout $x \in B_E$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\|T_\lambda(x_0 + rx)\| \leqslant n_0$. Remarquons que chaque A_n est symétrique, donc la boule $B_E(-x_0, r) \subset A_{n_0}$, d'où pour tout $x \in B_E$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\|T_\lambda(-x_0 + rx)\| \leqslant n_0$.

Soit $x \in B_E$ et $\lambda \in \Lambda$ quelconques. Alors $rx = \frac{1}{2}(x_0 + rx) + \frac{1}{2}(-x_0 + rx)$ satisfait $\|T_\lambda(rx)\| \leqslant n_0$, d'où $\|T_\lambda\| \leqslant n_0/r$, $\forall\lambda \in \Lambda$. □

Corollaire 2.1 *(principe de résonance)*
Soit $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite d'opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Banach E à valeurs dans un e.v.n. F. Supposons qu'il existe la limite $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ pour chaque $x \in E$. Alors T est aussi un opérateur linéaire borné défini sur E à valeurs dans F et on a

$$\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

Preuve. Comme $\|\cdot\|$ est continue, on déduit que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \|Tx\|$, donc $\{\|T_n x\|\}_{n\geqslant}$ est bornée pour chaque $x \in E$. D'après le principe de la borne uniforme $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| < \infty$, d'où $\|T_n x\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|T_n\| \cdot \|x\|$ $(n \geqslant 1)$. Encore par la continuité de la norme on trouve

$$\|Tx\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|.$$

□

Définition 2.2 *Soit $T \in L(E, F)$ et $S \in L(F, G)$, E, F, G e.v.n. Alors $ST := S\circ T \in L(E, G)$ défini par $ST(x) = S(Tx)$, $\forall x \in E$.*

Proposition 2.1 *Soient $T \in B(E, F)$ et $S \in B(F, G)$, E, F, G e.v.n. Alors $ST \in B(E, G)$ et $\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$. En particulier, si $T \in B(E, E)$, alors $\|T^n\| leq \|T\|^n$, où $T^n = TT^{n-1}$ $(n \geqslant 1$, $T^0 = I$, $Ix = x$ $\forall x \in E$ l'opérateur identité).*

Preuve. $\|STx\| \leqslant \|S(Tx)\| \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. □

Corollaire 2.2 *Soit $T \in B(E, E)$, où E est un espace de Banach. Supposons que $\|I-T\| \leqslant 1$. Alors T admet une inverse opérateur linéaire borné donné par*

$$T^{-1}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (I - T)^k x, \quad x \in E.$$

Preuve. Pour tout $x \in E$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k x\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|(I-T)^k x\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|(I-T)^k\| \cdot \|x\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|(I-T)\|^k \cdot \|x\|$$

où la série au membre de droite est convergente puisque $\|I-T\| \leqslant 1$. Comme E est un espace de Banach, d'après le principe de résonance on déduit que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k$ existe et définit un opérateur linéaire borné sur E.

Il reste à vérifier qu'il s'agit de l'inverse de T : pour tout $x \in E$

$$T\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k x = \lim_{n\to\infty}(I-(I-T))\left(\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x-(I-T)^{n+1}x\right) = x$$

et de la même façon $\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k\right)Tx = x$. □

Théorème 2.3 *(de Banach, principe de l'application ouverte)*
Soient E,F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu de E dans F. Supposons que T est une application surjective sur F. Alors T envoie chaque ouvert de E dans un ouvert de F.

Corollaire 2.3 *Soient E,F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu bijectif de E sur F. Alors T^{-1} est un opérateur linéaire continu de F sur E.*

Lemme 2.1 *Soient E,F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu de E dans F. Supposons que T est une application surjective sur F. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $T(B_E) \supset B_F(0,\delta)$.*

Preuve du théorème 2.3 avec le lemme 2.1 admis. Soit $O \neq \emptyset$ un ouvert et soit $y_0 \in T(O)$. Il existe $x_0 \in O$ tel que $Tx_0 = y_0$. Soit $B_E(x_0,r) \subset O$. Alors, d'après le lemme,

$$B_F(y_0,r\delta) = y_0 + B_F(0,r\delta) \subset y_0 + T(B_E(0,r)) = T(B_E(x_0,r)) \subset T(O),$$

autrement dit, $T(O)$ est un ouvert. □

Preuve du lemme 2.1. Comme T est surjective

$$F = T(E) = T\left(\cup_{n\geqslant 1} nB_E\right) = \cup_{n\geqslant 1} nT(B_E) = \cup_{n\geqslant 1} n\overline{T(B_E)}.$$

Comme F est complet, d'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $n_0\overline{T(B_E)}$ soit d'intérieur non-vide et donc, $\overline{T(B_E)}$ est aussi d'intérieur non-vide. De plus, $\overline{T(B_E)}$ est un convexe symétrique par rapprt à 0, donc il contient une boule centrée en 0 de rayon $\alpha > 0$, $\overline{T(B_E)} \supset B_F(0,\alpha)$.

Nous allons montrer que $\overline{T(B_E)} \supset B_F(0,\alpha)$ implique $T(B_E) \supset B_F(0,\beta)$, $\forall \beta < \alpha$. En remplaçant T par $\frac{1}{\alpha}T$, il suffit de montrer l'implication

$$\overline{T(B_E)} \supset B_F \Longrightarrow T(B_E) \supset B_F(0,\delta), \quad \forall \delta < \alpha.$$

Pour $n \geqslant 1$, soit $\varepsilon_n = {}^{(1-\delta)}/_{2^n}$. Soit $y \in B_F(0,\delta) = \delta B_F \subset \delta\overline{T(B_E)} = \overline{T(B_E(0,\delta))}$. Il existe $x_1 \in E$ tel que $\|x_1\| \leqslant \delta =: \varepsilon_0$ et $\|y - Tx_1\| \leqslant \varepsilon_1$. Mais alors $y - Tx_1 \in B_F(0,\varepsilon_1) = \varepsilon_1 B_F \subset \varepsilon_1\overline{T(B_E)} = \overline{T(B_E(0,\varepsilon_1))}$. Il existe $x_2 \in E$ tel que $\|x_1\| \leqslant \varepsilon_1$ et $\|y - Tx_1 - Tx_2\| \leqslant \varepsilon_2$ etc. On trouve donc une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que

$$x_n \in E, \quad \|x_n\| \leqslant \varepsilon_{n-1}, \quad \left\|y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| \leqslant \varepsilon_n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

On a $\sum_{n\geqslant 1}\|x_n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\varepsilon_{n-1} = 1$ et comme E est complet, on déduit la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Notons x sa somme. D'après la continuité de la norme on a que $\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|x_k\| = \sum_{n\geqslant 1}\|x_n\| = 1$. Par continuité on doit avoir $y = Tx = \sum_{n\geqslant 1} Tx_n$. Alors $y \in T(B_E)$ et la démonstration est complète. □

Corollaire 2.4 *Soit E un e.v.n. et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E telles que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ soient deux espaces de Banach. Supposons que les deux normes sont comparables, c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$, $\forall x \in E$. Alors les deux normes sont équivalentes.*

Définition 2.3 *Soit T un opérateur linéaire entre deux e.v.n. E et F. Le* graphe *de T est $G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F : x \in E\}$ en tant que sous-espace de l'espace produit $E \times F$ muni de la norme $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$. On dit que T est un opérateur fermé si $G(T)$ est un fermé dans $E \times F$ ou équivalent si lorsque $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$* telle que *$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$ on a $Tx = y$.*

Remarque : Il est clair que si $T \in B(E, F)$ avec E, F e.v.n. alors T est un opérateur fermé.

Théorème 2.4 *(de Banach, principe du graphe fermé)*
Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$ un opérateur fermé. Alors T est un opérateur continu.

Preuve. Le graphe $G(T)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach produit $E \times F$. Par conséquent, $G(T)$ est un espace de Banach. L'application linéaire $p : G(T) \to E$ donnée par $p(x, Tx) = x$ est bijective et continue (car $\|p(x, Tx)\|_E = \|x\|_E \leqslant \|x\|_E + \|Tx\|_F$). D'après le principe de l'application ouverte l'inverse p^{-1} de p est continue. L'application linéaire $q : G(T) \to R(T) \subset F$ donée par $q(x, Tx) = Tx$ est aussi continue. Par conséquent $T = q \circ p^{-1}$ est aussi continue de E dans F. □

Définition 2.4 *Un sous-espace fermé $M \subset E$ d'un e.v.n. E est dit direct s'il existe un sous-espace fermé $N \subset E$ tel que $M \cap N = \{0\}$ et $E = M \oplus N$.*

Corollaire 2.5 *Un sous-espace fermé $M \subset E$ d'un espace de Banach E est direct ssi il existe $P \in B(E, E)$ avec $P^2 = P$ et $M = \{x \in E : Px = x\}$.*

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe un tel P. Alors $N = P^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E et $x = Px + (x - Px)$ c'est l'unique décomposition de x en $x = m + n$ avec $m = Px \in M$ et $n \in N$ (car $P(x - Px) = 0$). On déduit que M est direct.

Réciproquement, supposons M direct. On pose $Px = m$ lorsque x admet une unique décomposition $x = m + n$ avec $m \in M$ et $n \in N$. Alors on peut voir que $P \in L(E, E)$ et $P^2 = P$. Reste à vérifier la continuité de P. Soit $\{x_k\}_{k\geqslant 1} \subset E$, $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ et $\lim_{k\to\infty} Px_k = y$. Mais $Px_k = m_k$ lorsque $x_k = m_k + n_k$ et donc $\{Px_k\} \subset M$. Comme M est fermé on déduit que $y \in M$. Comme $\lim_{k\to\infty}(m_k + n_k) = 0$ et $\lim_{k\to\infty} m_k = y$ on déduit que $\lim_{k\to\infty} n_k = -y$. N étant fermé et $\{n_k\} \subset N$, on déduit que $y \in N$. Alors $y \in M \cap N = \{0\}$, donc $y = 0$ d'après le principe du graphe fermé P est continu. □

2.1.2 Classes remarquables d'opérateurs

Définition 2.5 *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in B(E,F)$. On définit le dual $T^\star$ de l'opérateur T un opérateur défini sur $F^\star$ par $T^\star f(x) = f(Tx)$, pour tout $x \in E$ et toute $f \in F^\star$.*

Proposition 2.2 *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in B(E,F)$. Alors $T^\star \in B(F^\star, E^\star)$ et $\|T^\star\| = \|T\|$.*

Preuve. Montrons déjà que $T^\star$ est bien défini. Il est facile à vérifier que l'application $x \mapsto f(Tx)$ est linéaire, donc $x \mapsto T^\star f(x)$ est linéaire. Soit $x \in E$. Alors $|f(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \|Tx\| \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. Ainsi $T^\star f$ est aussi une application bornée donc $T^\star f \in E^\star$. Il est facile à vérifier que l'application $f \mapsto T^\star f$ est linéaire et d'après l'inégalité précédente $\|T^\star f\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\|$. On déduit que $T^\star \in B(F^\star, E^\star)$ et $\|T^\star\| \leqslant \|T\|$.

Pour obtenir l'inégalité inverse on peut utiliser une conséquence du théorème de Hahn-Banach, le Corollaire 2.7 qui sera démontré au § 2.2.1 ci-dessous. Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E^\star$ telle que $\|f_0\| = 1$ et $f_0(Tx_0) = \|Tx_0\|$. On pose $f_0^\star := T^\star f_0 \in E^\star$. Alors $f_0^\star(x_0) = f_0(Tx_0) = \|Tx_0\| > 0$. Ainsi $\|Tx_0\| = |T^\star f_0(x_0)| \leqslant \|T^\star f_0\| \leqslant \|T^\star\| \cdot \|x_0\|$, d'où $\|T\| \leqslant \|T^\star\|$.□

Proposition 2.3 *Soient E, F, G des espaces de Banach, $T, S \in B(E,F)$, $U \in B(F,G)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

1. *$(\alpha T + \beta S)^\star = \alpha T^\star + \beta S^\star$;*
2. *$(ST)^\star = T^\star S^\star$;*
3. *$T^\star$ est inversible ssi T est inversible et $(T^\star)^{-1} = (T^{-1})^\star$.*

Preuve. Prouvons le deuxième point les autres étant identiques. On a, pour $f \in G^\star$ et $x \in E$ arbitraires $(ST)^\star f(x) = f(STx) = f(S(Tx)) = (S^\star f)(Tx) = T^\star(S^\star f)(x) = (T^\star S^\star) f(x)$. Ainsi, pour toute $f \in G^\star$, $(ST)^\star f = (T^\star S^\star) f$. □

Définition 2.6 *Soient E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. On définit l'adjoint $T^\star$ de l'opérateur T sur E par l'égalité $(Tx, y) = (x, T^\star y)$, pour tous $x, y \in E$.*

Remarque : Soit E un espace de Hilbert et notons un instant T^{d} le dual de l'opérateur T lorsque l'on regarde E comme espace de Banach. On a $T^{\mathrm{d}} f(x) = f(Tx)$, pour tout $x \in E$ et toute $f \in E^\star$. Notons $\mathcal{J}$ l'application qui associe à chaque fonctionnelle linéaire continue $f \in E^\star$ l'unique $y_f \in E$ tel que $f(x) = (x, y_f)$, $\forall x \in E$. Il s'agit d'une bijection et d'une isométrie. L'égalité précédente s'écrit $(Tx, \mathcal{J} f) = (x, \mathcal{J} T^{\mathrm{d}} f)$ ou encore $(Tx, y) = (x, \mathcal{J} T^{\mathrm{d}} \mathcal{J}^{-1} y)$. Ainsi $T^\star = \mathcal{J} T^{\mathrm{d}} \mathcal{J}^{-1}$. De plus soit $g \in E^\star$, alors $g = T^{\mathrm{d}} f$, ssi $T^\star y_f = y_g$. Sur un espace de Hilbert on notera toujours $T^\star$ l'adjoint de T.

Proposition 2.4 *Soient E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. Alors $T^\star \in B(E,E)$ et $\|T^\star\| = \|T\|$.*

Preuve. Elle est identique à celle du cas d'un opérateur dual. □

Proposition 2.5 *Soient E un espace de Hilbert, $T, S \in B(E,E)$, $\alpha \in \mathbb{K}$.*

1. *$(T^\star)^\star = T$*

2. $I^\star = I$
3. $(\alpha T)^\star = \overline{\alpha} T^\star$, $(T+S)^\star = T^\star + S^\star$, $(ST)^\star = T^\star S^\star$.

Preuve. C'est une conséquence facile de la définition. □

Proposition 2.6 *Soient E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. Alors $N(T) = R(T^\star)^\perp$. En particulier $E = N(T) \oplus R(T^\star)$.*

Preuve. On a

$$N(T) = \{x \in E : Tx = 0\} = \{x \in E : (Tx, y) = 0, \forall y \in E\}$$
$$= \{x \in E : (x, T^\star y) = 0, \forall y \in E\} = R(T^\star)^\perp.$$

□

Définition 2.7 *Soient E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. On dit que T est* auto-adjoint *si $T^\star = T$, c'est-à-dire $(Tx, y) = (x, Ty)$, pour tous $x, y \in E$. On dit que T est* unitaire *s'il existe l'inverse $T^{-1} = T^\star$. On dit que T est* normal *si $TT^\star = T^\star T$.*

Remarque : Soit E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. Alors $TT^\star$ et $T^\star T$ sont toujours auto-adjoints.

Proposition 2.7 *Soient E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$.*
1. *Si E est un e.v.n. sur $\mathbb{C}$ et si $(Tx, x) = 0$, pour tout $x \in E$, alors $T = 0$.*
2. *Si E est un e.v.n. sur $\mathbb{R}$, si T est auto-adjoint et si $(Tx, x) = 0$, pour tout $x \in E$, alors $T = 0$.*

Preuve. 1) C'est un calcul direct pour vérifier que, pour tous $x, y \in E$ on a

$$4(Tx, y) = (T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) + i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy).$$

On déduit que $(Tx, y) = 0$, $\forall x, y \in E$. En particulier $(Tx, Tx) = 0$, pour tout $x \in E$. Alors $Tx = 0$, pour tout $x \in E$, donc $T = 0$.

2) Cette fois-ci on a, pour tous $x, y \in E$, $4(Tx, y) = (T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)$ et on termine comme dans la première partie. □

Proposition 2.8 *Soit E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. Si T est auto-adjoint, alors $\|T\| = \sup_{x \in B_E} |(Tx, x)|$.*

Preuve. Notons le membre de droite de l'égalité à démontrer par $\gamma > 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|(Tx, x)| \leqslant \|Tx\| \cdot \|x\| \leqslant \|T\|$ lorsque $x \in B_E$. On déduit que $\gamma \leqslant \|T\|$. Par ailleurs, $\forall x \in E$, $|(Tx, x)| \leqslant \gamma \|x\|^2$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque on a

$$|(T(x \pm \lambda y), x \pm \lambda y)| = |(Tx, x) \pm 2\lambda \mathrm{Re}(Tx, y) + \lambda^2 (Ty, y)| \leqslant \gamma \|x \pm \lambda y\|^2$$

et on déduit

$$|4\lambda \mathrm{Re}(Tx, y)| \leqslant \gamma(\|x + \lambda y\|^2 + \|x - \lambda y\|^2) = 2\gamma(\|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2).$$

On prend, lorsque $y \neq 0$, $\lambda = \|x\|/\|y\|$ et on trouve $|\mathrm{Re}(Tx, y)| \leqslant \gamma \|x\| \cdot \|y\|$. Ensuite, si on prend dans cette inégalité $e^{i\theta} y$ à la place de y on trouve $|(Tx, y)| \leqslant \gamma \|x\| \cdot \|y\|$. En particulier, $0 \leqslant (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \leqslant \gamma \|x\| \cdot \|Tx\|$, d'où $\|T\| \leqslant \gamma$. □

Proposition 2.9 *Soit E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. Si T est auto-adjoint, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$, pour tout $n \geqslant 1$ entier.*

Preuve. On peut écrire

$$\|T\|^2 = \sup_{x \in B_E} (Tx, Tx) = \sup_{x \in B_E} (T^\star Tx, x) \leqslant \|T^\star T\| \leqslant \|T^\star\| \cdot \|T\| = \|T\|^2.$$

Alors $\|T^\star T\| = \|TT^\star\| = \|T\|^2$ et comme T est auto-adjoint, $\|T\|^2 = \|T^2\|$. Comme l'opérateur T^k est aussi auto-adjoint on a $\|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\|$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Si $1 \leqslant n \leqslant 2^k$, alors

$$\|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\| = \|T^n T^{2^k - n}\| \leqslant \|T^n\| \cdot \|T\|^{2^k - n} \leqslant \|T\|^n \|T\|^{2^k - n} = \|T\|^{2^k}$$

d'où $\|T^n\| \cdot \|T\|^{2^k-n} = \|T\|^{2^k}$, autrement dit $\|T^n\| = \|T\|^n$. □

Proposition 2.10 *Soit E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *T est unitaire ;*
2. *T est une isométrie ;*
3. *$(Tx, Ty) = (x, y)$, pour tous $x, y \in E$.*

Preuve. 3 implique 2 c'est trivial. Montrons que 2 implique 3. On a

$$4\mathrm{Re}(Tx, Ty) = \|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\mathrm{Re}(x,y).$$

Ensuite on prend iy à la place de y et on trouve $\mathrm{Im}(Tx, Ty) = \mathrm{Im}(x, y)$.

1 implique 3 : si T est unitaire $(Tx, Ty) = (T^\star Tx, y) = (T^{-1}Tx, y) = (x, y)$. Montrons que 3 implique 1. L'égalité $\|Tx\| = \|x\|$ implique l'injectivité donc l'existence de T^{-1}. De plus on a $(x, y) = (Tx, Ty) = (T^\star Tx, y)$ pour tous $x, y \in E$ donc $T^\star T = I$, donc $T^{-1} = T^\star$. □

Proposition 2.11 *Soit E un espace de Hilbert et $T \in B(E,E)$. T est normal ssi $\|Tx\| = \|T^\star x\|$ pour tout $x \in E$.*

Preuve. On a, pour tout $x \in E$

$$\|Tx\|^2 - \|T^\star x\|^2 = (Tx, x) - (T^\star x, T^\star x) = (T^\star Tx, x) - (TT^\star x, x) = ((T^\star T - TT^\star)x, x).$$

Si T est normal, le membre de droite de l'égalité précédente est nul, donc $\|Tx\| = \|T^\star x\|$ pour tout $x \in E$. Réciproquement, si $((T^\star T - TT^\star)x, x) = 0$ pour tout $x \in E$, d'après la Proposition 2.7 et le fait que $T^\star T - TT^\star$ est auto-adjoint, on trouve l'égalité $T^\star T = TT^\star$. □

2.1.3 Théorie spectrale : une introduction

A REDIGER.

2.2 Étude de l'espace $E^\star$

2.2.1 Théorèmes de Hahn-Banach

Théorème 2.5 *(de Hahn-Banach)*
Soit M_0 un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. E et soit f_0 une fonctionnelle linéaire continue définie sur M_0 ($f_0 \in M_0^\star$). Alors il existe une fonctionelle linéaire continue f définie sur E ($f \in E^\star$) telle que $f_{|M_0} = f_0$ et $\|f\| = \|f_0\|$.

Preuve. Soit la famille $\mathcal{P}$ des paires (M', f') où $M_0 \subset M' \subset E$ est un sous-espace vectoriel et $f'_{|M_0} = f_0$ avec $\|f'\| = \|f_0\|$. On introduit un ordre partiel sur cette famille

$$(M', f') \prec (M'', f'') \quad \text{ssi} \quad M' \subset M'' \text{ et } f''_{|M'} = f'.$$

Alors on peut montrer qu'il existe un élément maximal $(L, g) \in \mathcal{P}$ pour l'ordre introduit (admis).

Montrons que $L = E$. Supposons le contraire, $L \neq E$.

a) Supposons que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in E \setminus L$. On pose $L_1 = \text{Vect}\{L, x_0\} = \{\ell + \alpha x_0 : \ell \in L, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Comme $x_0 \notin L$, chaque $x \in L_1$ admet une unique représentation $x = \ell + \alpha x_0$. Nous allons définir $f_1(\ell + \alpha x_0) = g(\ell) + \alpha c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Une fois le choix de c précisé, f_1 sera une fonctionnelle linéaire sur L_1 et $(f_1)_{|L} = g$. On a, pour tous $\ell, \ell' \in L$

$$g(\ell) - g(\ell') \leqslant \|g\| \cdot \|\ell - \ell'\| = \|g\| \cdot \|\ell + x_0 - x_0 - \ell'\| \leqslant \|g\| \cdot \|\ell + x_0\| + \|g\| \cdot \|\ell' + x_0\|$$

Alors $-g(\ell') - \|g\| \cdot \|\ell' + x_0\| \leqslant -g(\ell) + \|g\| \cdot \|\ell + x_0\|$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ situé entre ces deux réels, d'où $|g(\ell) + c| \leqslant \|g\| \cdot \|\ell + x_0\|$, pour tout $\ell \in L$. Cela signifie que, si $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} |f_1(x)| = |f_1(\ell + \alpha x_0)| = |g(\ell) + \alpha x_0| = |\alpha| \cdot |\frac{1}{\alpha} g(\ell) + x_0| &= |\alpha| \cdot |g(\frac{1}{\alpha}\ell) + x_0| \\ &\leqslant |\alpha| \cdot \|g\| \cdot \|\frac{1}{\alpha}\ell + x_0\| = \|g\| \cdot \|\ell + \alpha x_0\|. \end{aligned}$$

d'où $\|f_1\| \leqslant \|g\|$. Comme f_1 étend g de L à L_1 on a aussi $\|g\| \leqslant \|f_1\|$. On a donc un couple (L_1, f_1) tel que $M_0 \subset L \subset L_1$, $(f_1)_{|M_0} = g_{|M_0} = f_0$ et $\|f_1\| = \|g\| = \|f_0\|$. Cela contredit la maximalité de (L, g) donc l'hypotèse $L \neq E$ est fausse.

b) Supposons que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On écrit $f_0 = h + i\,k$ avec h, k fonctionnelles linéaires réelles (parties réelle et imaginaire). Comme f_0 est une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{C}$ on $h(i\,x) + i\,k(i\,x) = f_0(i\,x) = i\,f_0(x) = i\,h(x) - k(x)$ donc $h(x) = k(i\,x)$ et $k(x) = -h(i\,x)$. Autrement dit $f_0(x) = h(x) - i\,h(i\,x)$, $\forall x \in M_0$ avec $h : M_0 \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{R}$ et continue (car $|h(x)| \leqslant |f_0(x)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|x\|$).

D'après la partie *a)* il existe $H : E \to \mathbb{R}$ fonctionnelle linéaire sur $\mathbb{R}$ continue avec $H_{|M_0} = h$ et $\|H\| = \|h\|$ en considérant E comme e.v.n. sur $\mathbb{R}$. Nous allons définir $f : E \to \mathbb{C}$ par $f(x) = H(x) - i\,H(i\,x)$. f est linéaire sur $\mathbb{R}$ et $f_{|M_0} = f_0$. De plus $f(i\,x) = H(i\,x) - i\,H(-x) = H(i\,x) + i\,H(x) = i\,f(x)$, donc f est linéaire sur $\mathbb{C}$.

Notons pour $x \in E$, $f(x) = re^{-i\,\theta}$. Alors $0 \leqslant |f(x)| = r = e^{i\,\theta} f(x) = f(e^{i\,\theta} x)$ et on déduit que $|f(x)| = |f(e^{i\,\theta} x)| = |H(e^{i\,\theta} x)| \leqslant \|H\| \cdot \|e^{i\,\theta} x\| = \|h\| \cdot \|x\|$. Ainsi $\|f\| \leqslant \|h\| \leqslant \|f_0\|$. Comme f est une extension de f_0 on a aussi $\|f_0\| \leqslant \|f\|$ et le théorème est démontré. $\square$

Corollaire 2.6 *Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un e.v.n. E et soit $x \notin M$. Alors, il existe f une fonctionnelle linéaire continue définie sur E telle que $f_{|M} = 0$, $\|f\| = 1$ et $f(x) = \inf\{\|x-m\| : m \in M\} = \mathrm{dist}(x, M)$.*

Preuve. Soit $d := \inf\{\|x-m\| : m \in M\} = \mathrm{dist}(x, M)$ et comme M est un fermé et $x \notin M$, $D > 0$. Nous allons définir f_0 sur $M_0 := \mathrm{Vect}(M, x) = \{m + \alpha x : m \in M, \alpha \in \mathbb{K}\}$ par $f_0(m + \alpha x) = \alpha d$. Il est alors clair que $(f_0)_{|M_0} = 0$. On peut écrire, pour $m \in M, \alpha \in \mathbb{K}$

$$|f_0(m+\alpha x)| = |\alpha| d = \frac{\|m+\alpha x\|}{\|(1/\alpha)m + x\|} d = \frac{\|m+\alpha x\|}{\|x - (-1/\alpha)m\|} d \leqslant \frac{\|m+\alpha x\|}{\mathrm{dist}(x, M)} d = \|m + \alpha x\|,$$

d'où $\|f_0\| \leqslant 1$.

Soit $\{m_n\}_{n \geqslant 1} \subset M$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|x - m_n\| = d$. Alors

$$d = |f_0(m) - f_0(x)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|m_n - x\| \to \|f_0\| \cdot d, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

d'où $\|f_0\| \geqslant 1$. Ainsi $\|f_0\| = 1$ et $f_0(x) = d$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle $f \in E^\star$ telle que f soit une extension de f_0 et de même norme que f_0. Ainsi $\|f\| = \|f_0\| = 1$, $f_{|M} = (f_0)_{|M} = 0$ et $f(x) = f_0(x) = d$. □

Corollaire 2.7 *Soit $x_0 \neq 0$ quelconque dans E e.v.n. Alors, il existe f_0 une fonctionnelle linéaire continue définie sur E telle que $\|f_0\| = 1$ et $f_0(x_0) = \|x_0\| \neq 0$. En particulier, $\|x_0\| = \max_{g \in B_{E^\star}} |g(x_0)|$.*

Preuve. Pour la première partie prendre dans le résultat précédent $M = \{0\}$ car alors $\mathrm{dist}(x_0, 0) = \|x_0\|$. Prouvons la deuxième partie. Pour toute $g \in B_{E^\star}$ on a $|g(x_0)| \leqslant \|g\| \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$, d'où $\sup_{g \in B_{E^\star}} |g(x_0)| \leqslant \|x_0\|$.

Soit $M_0 = \overline{\mathrm{Vect}\{x_0\}}$ et $g_0 : M_0 \to \mathbb{K}$ donnée par $g_0(tx_0) = t\|x_0\|$. Il s'agit d'une fonctionnelle linéaire et elle est bornée car $|g_0(tx_0)| = |\,t\|x_0\|\,| = |t| \cdot \|x_0\| = \|tx_0\|$. De plus $\|g_0\| = 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle $g \in E^\star$ telle que g soit une extension de g_0 et de même norme que g_0. Ainsi $\|g\| = \|g_0\| = 1$ et $g(x_0) = \|x_0\|$. Le supremum est donc atteint et égal à $\|x_0\|$. □

Corollaire 2.8 *(théorème de Mazur)*
Pour tout $x_0 \notin B_E$, la boule unité d'un e.v.n. E, il existe f_0 une fonctionnelle linéaire continue définie sur E telle que $f_0(x_0) \geqslant \sup_{x \in B_E} \|f_0(x)\|$.

Preuve. Comme $x_0 \notin B_E$, alors $x_0 \neq 0$, donc il existe une fonctionnelle $f_0 \in E^\star$ telle que $\|f_0\| = 1$ et $f_0(x_0) = \|x_0\|$ Alors $f_0(x_0) = \|x_0\| > 1 = \|f_0\| = \sup_{x \in B_E} \|f_0(x)\|$. □

Corollaire 2.9 *(problème de moments)*
Soit E un e.v.n., $\{x_n\}_{n \geqslant 1} \subset E$, $\{\alpha_n\}_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ et $\gamma > 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $f \in E^\star$ telle que

$$f(x_j) = \alpha_j,\ j = 1, 2, \dots \qquad \text{et} \qquad \|f\| = \gamma \tag{2.1}$$

est que les inégalités

$$\left|\sum_{j=1}^{d} \beta_j \alpha_j\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j\right\| \tag{2.2}$$

aient lieu $\forall d \geqslant 1$, $\forall \beta_1, \dots \beta_d \in \mathbb{C}$.

Preuve. La nécessité de (2.2) est claire d'après la définition de $\|f\|$. Réciproquement, supposons (2.2). On note $M_1 := \{z \in E : z = \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j,\ d$ et les β arbitraires$\}$. Pour deux écritures $z = \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j = \sum_{k=1}^{r} \beta_k x_k$ de $z \in M_1$ on a, d'après (2.2)

$$\left|\sum_{j=1}^{d} \beta_j \alpha_j - \sum_{k=1}^{r} \beta_k \alpha_k\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j - \sum_{k=1}^{r} \beta_k x_k\right\| = 0.$$

Ainsi, est bien définie linéaire et continue (encore avec (2.2)) la fonctionnelle f_1 sur M_1 par $f_1(\sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j) = \sum_{j=1}^{d} \beta_j \alpha_j$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle $f \in E^\star$ telle que f soit une extension de f_1 et de même norme que f_1. □

Lemme 2.2 *Un espace de Banach E est séparable ssi S_E est séparable.*

Preuve. Si $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est dense dans S_E il suffit de considérer la suite $\{r_k x_n\}_{n,k\geqslant 1}$ pour une suite $\{r_k\}_{k\geqslant 1}$ dense dans $\mathbb{K}$. Réciproquement, si $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est dense dans E, il suffit de considérer $\{x_n/\|x_n\|\}_{n\geqslant 1}$. □

Corollaire 2.10 *Soit E un espace de Banach. Si $E^\star$ est séparable, alors E est séparable.*

Preuve. Comme $E^\star$ est un espace de Banach séparable, alors $S_{E^\star}$ est séparable. Il existe donc $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite dense dans $S_{E^\star}$. On choisit $x_n \in S_E$ tel que $|f_n(x_n)| \geqslant 1/2$. Notons M l'espace vectoriel fermé engendré par les x_n. Mais M est séparable (les combinaisons rationnelles finies des $\{x_n\}$ sont denses dans M) donc il suffit de montrer que $M = E$. Supposons le contraire : d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe alors $f \in E^\star$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$. Soit n tel que $\|f_n - f\| < 1/4$. Alors

$$\begin{aligned}|f(x_n)| = |f_n(x_n) - (f_n(x_n) - f(x_n))| &\geqslant |f_n(x_n)| - |f_n(x_n) - f(x_n)| \\ &\geqslant |f_n(x_n)| - \|f - f_n\| \cdot \|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. □

Corollaire 2.11 (résultat admis) *(théorème de Helly)*
Soient E un espace de Banach réel, $f_1, \ldots, f_d$ un nombre fini de fonctionnelles linéaires continues et d réels $\alpha_1, \ldots \alpha_d$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe, pour chaque $\varepsilon > 0$, un élément $x_\varepsilon \in E$ tel que

$$f_j(x_\varepsilon) = \alpha_j,\ j = 1, 2, \ldots, d \quad \text{et} \quad \|x_\varepsilon\| \leqslant \gamma + \varepsilon \tag{2.3}$$

est que l'inégalité

$$\left|\sum_{j=1}^{d} \beta_j \alpha_j\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{j=1}^{d} \beta_j f_j\right\| \tag{2.4}$$

ait lieu pour tout choix de d réels $\beta_1, \ldots \beta_d$.

Corollaire 2.12 *Soit E un e.v.n. Chaque $x_0 \in E$ définit une fonctionnelle linéaire continue Jx_0 sur $E^\star$ donnée par $Jx_0(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in E^\star$. L'application $x \mapsto Jx$ est une isométrie linéaire entre de E dans $(E^\star)^\star =: E^{\star\star}$.*

Preuve. Il est facile de vérifier que $Jx_0(f_1+f_2) = Jx_0(f_1)+Jx_0(f_2)$ et $Jx_0(\alpha f) = \alpha Jx_0(f)$. On a $|Jx_0(f)| = |f(x_0)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_0\|$ et donc Jx_0 est une fonctionnelle linéaire bornée sur $E^\star$. De plus $\|Jx_0\| \leqslant \|x_0\|$. Il est aussi facile de vérifier que $J(x_1 + x_2) = Jx_1 + Jx_2$ et $J(\alpha x) = \alpha Jx$. Par ailleurs, si $x_0 \neq 0$, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle linéaire continue $f_1 \in E^\star$ telle que $\|f_1\| = 1$ et $f_1(x_0) = \|x_0\|$. Alors, $|Jx_0(f_1)| = |f_1(x_0)| = \|x_0\| = \|x_0\| \cdot \|f_1\|$ et donc $\|Jx_0\| \geqslant \|x_0\|$. On a obtenu que $\|Jx_0\| = \|x_0\|$ et cela pour tout $x_0 \in E$. □

Remarque : E et $J(E)$ sont donc isométriques, avec $J(E) \subset E^{\star\star}$. Si E est de Banach, $J(E)$ l'est aussi, donc $J(E)$ est un fermé de $E^{\star\star}$. D'autre part on obtient ainsi une contruction simple du completé de E (ou plutôt E est isomorphe à un espace de Banach) : l'adhèrence de $J(E)$ dans $E^{\star\star}$.

Définition 2.8 *Un e.v.n. E est dit réflexif s'il peut être identifié à son bi-dual $E^{\star\star}$ à l'aide de l'application $x \mapsto Jx$ précédente. Tout espace réflexif est donc un espace de Banach.*

2.2.2 Exemples d'espaces en dualité

Dans ce paragraphe on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *(Preuves à completer...)*

1. $c_0^\star = \ell_1$.

2. $\ell_1^\star = \ell_\infty$.

3. Si $p, q \in]1, \infty[$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $\ell_p^\star = \ell_q$.

4. Si $p, q \in]1, \infty[$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $\mathrm{L}^p([0,1])^\star = \mathrm{L}^q([0,1])$.

5. $\mathrm{L}^1([0,1])^\star = \mathrm{L}^\infty([0,1])$.

6. $\mathrm{C}([0,1])^\star = \mathrm{MSVB}([0,1])$ (mesures de Stieltjes de variation totale bornée).

2.2.3 Convergences faibles

Définition 2.9 *Soit E un e.v.n. et $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite. On dit que $\{x_n\}$ est faiblement convergente s'il existe $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ pour toute $f \in E^\star$. On dit que $x_n \to x_\infty \in E$ faiblement lorsque $n \to \infty$ si $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$, $\forall f \in E^\star$. D'après le théorème de Hahn-Banach la limite faible x_∞ est unique. L'existence de x_∞ sera discutée dans un résultat ci-dessous.*

Proposition 2.12 *Soit E un e.v.n. et $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite.*

1. *Si $x_n \to x_\infty$ fortement, alors $x_n \to x_\infty$ faiblement, mais pas l'inverse.*
2. *Si $\{x_n\}$ est faiblement convergente, alors $\{x_n\}$ est bornée.*
3. *Si $x_n \to x_\infty$ faiblement, alors $\{\|x_n\|\}$ est bornée et $\|x_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Preuve. 1. La première partie est claire puisque $|f(x_n) - f(x_\infty)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x_\infty\|$. Pour la deuxième partie, soit $E = \ell_2$ et $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ avec $x_n = (u_j^n)_{j\geqslant 1}$, $u_j^n = \delta_{nj}$. Il est clair que $\|x_n\|_2 = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

La valeur d'une fonctionnelle $f \in \ell_2^\star$ est donnée par $f(x) = \sum_{j\geqslant 1} u_j\overline{v_j}$, pour tout $(u_j) \in \ell_2$ et pour un certain $(v_j) \in \ell_2$. Ainsi $f(x_n) = \overline{v_n} \to 0$, lorsque $n \to \infty$ puisque $\sum_{j\geqslant 1} |v_j|^2 < \infty$. Ainsi $x_n \to 0$ faiblement, mais $x_n \nrightarrow 0$ fortement.

2. et 3. Nous allons utiliser le principe de résonance sur $E^\star$. On définit une suite de fonctionnelles linéaires continues X_n sur $E^\star$ par $X_n(f) = f(x_n)$, pour toute $f \in E^\star$ et tout $n \geqslant 1$. En effet, il est facile de vérifier le fait que X_n est linéaire et $|X_n(f)| = |f(x_n)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n\|$, donc $\|X_n\| \leqslant \|x_n\|$, pour tout $n \geqslant 1$. De plus, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E^\star$ telle que $f(x_n) = \|x_n\|$, donc en fait $\|X_n\| = \|x_n\|$. Comme $\{x_n\}$ est faiblement convergente on déduit que $\{X_n(f)\}$ est convergente pour tout $f \in E^\star$. Elle est donc bornée pour toute $f \in E^\star$ et d'après le principe de la borne uniforme, il existe $M > 0$ telle que $\|X_n\| \leqslant M$, $\forall n \geqslant 1$. On déduit que $\{\|x_n\|\}$ et donc $\{x_n\}$ sont bornées.

Si de plus $x_n \to x_\infty$ faiblement, alors $\lim_{n\to\infty} X_n(f) = X_\infty(f) := f(x_\infty)$, $\forall f \in E^\star$, avec X_∞ une fonctionnelle linéaire continue sur $E^\star$. D'après le principe de résonance $\|X_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|X_n\|$ et la conclusion s'ensuit. $\square$

Proposition 2.13 *Soit E un e.v.n. et $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite. $\{x_n\}$ est faiblement convergente vers x_∞ ssi $\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\| < \infty$ et $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$, pour toute fonctionnelle linéaire continue $f \in D$ sous-ensemble dense de $E^\star$.*

Preuve. La seule chose à faire est de prover que les deux conditions sont suffisantes. Quelque soit $g \in E^\star$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in D$ telle que $\|g - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}|g(x_n) - g(x_\infty)| &\leqslant |g(x_n) - f_\varepsilon(x_n)| + |f_\varepsilon(x_n) - f_\varepsilon(x_\infty)| + |f_\varepsilon(x_\infty) - g(x_\infty)| \\ &\leqslant \varepsilon\|x_n\| + |f_\varepsilon(x_n) - f_\varepsilon(x_\infty)| + \varepsilon\|x_\infty\|.\end{aligned}$$

On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} |g(x_n) - g(x_\infty)| \leqslant 2\varepsilon \sup_{1\leqslant n\leqslant\infty} \|x_n\|$. $\square$

Proposition 2.14 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite faiblement convergente. Alors il existe $x_\infty \in E$ tel que $x_n \to x_\infty$ faiblement.*

Preuve. Comme dans la preuve de la Proposition 2.12, chaque x_n définit une fonctionnelle linéaire continue X_n sur $E^\star$ par $X_n(f) = f(x_n)$, pour toute $f \in E^\star$ et comme $\{f(x_n)\}$ converge pour toute f, on en déduit l'existence d'une fonctionnelle linéaire continue $X_\infty \in E^{\star\star}$. Comme E est réflexif, il existe $x_\infty = J^{-1}X_\infty \in E$. Ainsi $X_\infty(f) = f(x_\infty)$. $\square$

Proposition 2.15 *Soit E un espace de Hilbert et soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite faiblement convergente (vers $x_\infty \in E$, d'après la proposition précédente). Alors $x_n \to x_\infty$ fortement ssi $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_\infty\|$.*

Preuve. Dans un sens c'est la continuité de la norme. Pour l'autre sens on écrit

$$\|x_n - x_\infty\| = (x_n - x_\infty, x_n - x_{infty}) = \|x_n\|^2 - (x_n, x_\infty) - (x_\infty, x_n) + \|x_\infty\|^2$$

et le membre de droite converge vers $\|x_\infty\|^2 - (x_\infty, x_\infty) - (x_\infty, x_\infty) + |x_\infty\|^2$ d'après la convergence faible. $\square$

Proposition 2.16 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite telle que $\{\|x_n\|\}$ soit bornée. Alors il existe une suite extraite $\{x_{n_k}\}$ faiblement convergente vers un élément de E.*

Preuve. Nous allons faire la démonstration dans le cas d'un espace de Banach réflexif séparable (le cas général est plus technique et sera admis). Dans ce cas $E^\star$ est aussi séparable, d'après le Corollaire 2.10. Soit la suite $\{f_n\} \subset E^\star$ dense dans $E^\star$. Comme $\{\|x_n\|\}$ est bornée, $\{f_1(x_n)\}$ est aussi bornée. Il existe alors une suite extraite $\{x_{n_1}\} \subset \{x_n\}$ telle que $\{f_1(x_{n_1})\}$ est convergente. Comme la suite $\{f_2(x_{n_1})\}$ est bornée, il existe une suite extraite $\{x_{n_2}\} \subset \{x_{n_1}\}$ telle que $\{f_2(x_{n_2})\}$ est convergente. De cette façon on peut choisir une suite extraite $\{x_{n_{i+1}}\} \subset \{x_{n_i}\}$ telle que $\{f_j(x_{n_{i+1}})\}$ est convergente pour $j = 1, 2, \ldots, i+1$. Alors la sous-suite diagonale $\{x_{n_n}\}$ de la suite initiale $\{x_n\}$ satisfait la condition que $\{f_j(x_{n_{i+1}})\}$ est convergente pour $j = 1, 2, \ldots$ D'après la Proposition 2.13 il existe finie $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_n})$ pour toute $f \in E^\star$. Enfin, d'après la Proposition 2.14 il existe la limite faible de $\{x_{n_n}\}$. □

Définition 2.10 *Soit E un e.v.n. et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$ une suite. On dit que $\{f_n\}$ est faiblement-$\star$ convergente s'il existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$. On dit que $f_n \to f_\infty \in E$ faiblement-$\star$ lorsque $n \to \infty$ si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$, $\forall x \in E$.*

Remarque : Sur $E^\star$ il y a trois types de convergences : en norme (forte), faible et faible-$\star$. La convergence forte implique la convergence faible (Proposition 2.12) qui implique la convergence faible-$\star$ (car E peut être vu comme un sous-espace de $(E^\star)^\star$ à l'aide de l'application J).

Proposition 2.17 *Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$ une suite.*

1. *Si $\{f_n\}$ est faiblement-$\star$ convergente, alors il existe $f_\infty \in E^\star$ telle que $f_n \to f_\infty$ faiblement-$\star$ et $\|f_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.*
2. *$\{f_n\}$ est faiblement-$\star$ convergente (vers $f_\infty \in E^\star$ d'après la première partie) ssi $\{\|f_n\|\}$ est bornée et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$, pour tout $x \in D$ sous-ensemble dense de E.*

Preuve. La première partie est une conséquence du principe de résonance. La deuxième partie se démontre comme la Proposition 2.13. □

Théorème 2.6 (résultat admis) *(Alaoglu)*
La boule unité fermée $B_{E^\star}$ du dual d'un e.v.n. est compacte pour la topologie faible-$\star$. En particulier, si E est un espace de Hilbert, la boule unité fermée B_E est compacte pour la topologie faible.

Théorème 2.7 (résultat admis) *(Kakutani)*
Un espace de Banach E est réflexif ssi la boule unité fermée B_E est compacte pour la topologie faible.

2.3 Exercices

2.1. Soit E un e.v.n. et soit $T \in B(E,E)$. L'ensemble de tous les opérateurs $S \in B(E,E)$ est-il sous-espace vectoriel de $B(E,E)$ si

i) $TS = 0$;

ii) $TS = ST$?

2.2. Soient $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ et $T \in B(E,F)$ avec E,F espaces de Banach. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in M$ où M est un sous-espace vectoriel dense dans E. Est-il vrai que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in E$? *Indication :* non ; $E = F = \ell_2$, $T_n x = T_n(u_j) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, nu_n, u_{n+1}, \ldots)$ $T = I$ et $M = c_{00}$.

2.3. Soit $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ avec E,F espaces de Banach. Supposons que $\{T_n x\}_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in B(E,F)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ pour tout $x \in E$.

2.4. Soit $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ avec E,F e.v.n. Supposons que $\{T_n x\}_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (dans F). Est-ce $T_n \to 0$ (dans $B(E,F)$) ? *Indication :* non ; $E = F = \ell_2$, $T_n x = T_n(u_j) = (0, 0, \ldots, 0, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$.

2.5. Soit l'espace ℓ_2 et les suites d'opérateurs $T_n x = T_n(u_j) = (0, 0, \ldots, 0, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$ et $S_n x = S_n(u_j) = (u_1/n, u_2/n, \ldots)$. Étudier la convergence des suites $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$.

2.6. Soit $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que $Tx(t) = \int_0^t e^s x(s)ds$. On introduit la suite d'opérateurs $T_n : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tels que

$$T_n x(t) = \int_0^t \left(\sum_{j=0}^n \frac{s^j}{j!} \right) x(s)ds, n \geqslant 1.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

2.7. Soit $T_n : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que $T_n x(t) = x(t^{1+1/n})$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ T_n est un operateur linéaire borné et que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - x\|_\infty = 0$ pour tout $x \in \mathrm{C}([0,1])$. Est-ce que $T_n \to I$ (dans l'espace $B(\mathrm{C}([0,1]), \mathrm{C}([0,1]))$? *Indication :* non.

2.8. Soit E un espace de Banach et $T \in B(E,E)$. On suppose que la série entière $\varphi(t) := \sum_{j=0}^\infty a_j t^j$ $(a_j \in \mathbb{R})$ converge sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer que la suite $T_n = \sum_{j=0}^n a_j T^j$ admet une limite $\varphi(T) \in B(E,E)$.

2.9. Soit E un espace de Banach et $T \in B(E,E)$. Montrer que $\|e^T\| \leqslant e^{\|T\|}$. Calculer e^I, où I est l'opérateur identité.

2.10. Soit E un espace de Banach et $T \in B(E,E)$. On suppose qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et que $Tx_n \to 0$ dans E. Montrer que l'inverse borné de T n'existe pas. *Indication :* utiliser l'exercice **1.28**.

2.11. Soit $E = \{x \in \mathrm{C}^1([0,1]) : x(0) = 0\}$ où $\mathrm{C}^1([0,1])$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère $T : E \to \mathrm{C}([0,1])$ défini par

$$Tx(t) = x'(t) + a(t)x(t), \quad a \in \mathrm{C}([0,1]).$$

Montrer que l'inverse borné T^{-1} existe.

2.12. Soit $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que

$$Tx(t) = x(t) + \int_0^t x(s)ds.$$

Montrer que $N(T) = 0$. Montrer que l'inverse borné T^{-1} existe et le calculer.

2.13. Soient $\{T_n\}_{n\geqslant 1} \subset B(E,F)$ et $T \in B(E,F)$ avec E, F espaces de Banach. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$, pour tout $x \in E$, qu'ils existent $T_n^{-1} \in B(F,E)$ et que $R(T) = F$. Montrer que les solutions de l'équation $T_n x_n = y$ convergent vers la solution de $Tx = y$ ($y \in F$ arbitraire) ssi $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n^{-1}\| < \infty$. *Indication :* montrer que si $\|T_n^{-1}\| < c$, $T_n x_n = y$ et $Tx = y$ alors $x_n \to x$; dans l'autre sens, montrer que la suite $x_n = T_n^{-1} y$ est bornée et utiliser le principe de la borne uniforme.

2.14. Soient E, F des e.v.n.

i) Montrer que si $T \in B(E,F)$ alors T est un opérateur fermé (c'est-à-dire que son graphe $G(T)$ est fermé).

ii) Montrer que si $T \in L(E,F)$ est un opérateur fermé et si T^{-1} existe, alors T^{-1} est aussi un opérateur fermé.

2.15. Soit $T : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ tel que

i) $Tx(t) = {}^{x(t)}/_{t}$ et $D(T) = \{x \in \mathrm{C}([0,1]) : \exists \lim_{t\downarrow 0} {}^{x(t)}/_{t}\}$;

ii) $Tx(t) = x'(t)$ et $D(T) = \{x \in \mathrm{C}^1([0,1]) : x(0) = 0\}$.

Montrer que dans les deux cas T est fermé. *Indication :* montrer que T^{-1} existe et est borné et utiliser la deuxième partie de l'exercice précédent.

2.16. Soit $T \in L(E,F)$ avec E, F e.v.n. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) T envoie tout ouvert de E dans un ouvert de F (T application ouverte) ;

ii) $\exists \delta > 0$ tel que $B_F(0,\delta) \subset T(B_E)$;

iii) $\exists M > 0$ telle que pour tout $y \in F$ il existe $x \in T^{-1}(\{y\})$ satisfaisant $\|x\|_E \leqslant M\|y\|_F$.

2.17. Soit $T \in B(E,F)$ avec E, F e.v.n. Montrer que si E est complet et si T est une application ouverte, alors F est complet. *Indication :* utiliser iii) de l'exercice précédent ainsi que l'exercice **1.6**.

2.18. Soit $T \in B(E,F)$ avec E, F espaces de Banach. Il y a équivalence entre :

i) $T(E)$ est fermé ;

i) $T : E \to T(E)$ est une application ouverte ;

iii) $\exists M > 0$ telle que pour tout $y \in T(E)$ il existe $x \in T^{-1}(\{y\})$ satisfaisant $\|x\|_E \leqslant M\|y\|_F$.

Indication : utiliser le principe de l'application ouverte, l'exercice **2.4** iii) et enfin, appliquer l'exercice **1.28** à l'opérateur linéaire borné (le justifier !) $S : E/N(T) \to T(E)$, $S(x+N(T)) = T(x)$.

2.19. Soit l'espace $E = \mathrm{C}^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On muni E de la norme supremum $\|x\|_\infty := \sup_{s\in[0,1]} |x(s)|$. Soit l'opérateur $T : E \to \mathrm{C}([0,1])$ défini par $Tx = x'$. Montrer que T est linéaire et que son graphe $G(T)$ est fermé. Montrer que T n'est pas borné. Pourquoi le principe du graphe fermé ne s'applique pas ? *Indication :* si $\lim_{n\to\infty}(x_n, x_n') = (x, x')$ dans $E \times \mathrm{C}([0,1])$, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} x_n' = x'$ uniformément sur $[0,1]$; trouver une suite $\{x_n\}$ bornée telle que $\{x_n'\}$ n'est pas bornée ; enfin montrer que E n'est pas complet.

2.20*. Soit M un sous-espace vectoiel fermé de $\mathrm{C}([0,1])$. tel que chaque élément de M est une fonction dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$. Montrer que M est de dimension finie. *Indications :* poser $T : M \to \mathrm{C}([0,1])$, par $Tx = x'$ et vérifier que son graphe est fermé ; en déduire que pour un $d \geqslant 1$ on a $\|x'\|_\infty \leqslant d$ lorsque $x \in M$ satisfait $\|x\|_\infty \leqslant 1$. On considère ensuite $s_j = j/4d$, $j = 0, 1, \ldots, 4d$ et on définit $S : M \to \mathbb{R}^{4d+1}$ par $Sx = \{x(s_0), \ldots, x(s_{4d})\}$. Montrer que si $\|x\|_\infty = 1$ alors pour certains j, $Sx(s_j) \neq 0$. En déduire que S est injective et ensuite que $\dim(M) \leqslant 4d + 1$.

2.21. Montrer que les fonctionnelles suivantes sont linéaires continues et chercher leur normes :

i) $f(x) = (1/3)[x(-1) + x(1)]$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

ii) $f(x) = \sum_{j=1}^n a_j x(t_j)$, $a_j \in \mathbb{R}, t_j \in [-1,1]$ fixés $(j = 1, \ldots, n)$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

iii) $f(x) = \int_0^1 x(s)ds$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

iv) $f(x) = \int_{-1}^1 x(s)ds - x(0)$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$;

v) $f(x) = \int_{-1}^1 sx(s)ds$, $x \in \mathrm{C}([-1,1])$ ou $x \in \mathrm{C}^1([-1,1])$ ou $x \in \mathrm{L}^2([-1,1])$;

vi) $f(x) = \sum_{j\geqslant 1} u_j/j$, $x = (u_j) \in \ell_2$ ou $x = (u_j) \in \ell_1$;

vii) $f(x) = \sum_{j\geqslant 1} u_j/2^{j-1}$, $x = (u_j) \in c_0$;

viii) $f(x) = \lim_{j\to\infty} u_j$, $x = (u_j) \in c$.

2.22. Soit E un e.v.n. et soit $f \in E^\star$, $f \neq 0$. Montrer que $E = M \oplus N(f)$, où M est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

2.23. Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Montrer que $f \in E^\star$.

2.24. Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. Montrer que $\{f_n\}$ converge dans $E^\star$ ssi la suite $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ converge uniformément pour $x \in B_E$.

2.25. Soit E e.v.n. et $x_0 \in E$. On suppose que pour toute $f \in E^\star$, telle que $\|f\| = 1$ on a $|f(x_0)| \leqslant 1$. Montrer que $\|x_0\| \leqslant 1$.

2.26. Soit E un espace de Banach. Alors, quelque soit $x_0 \notin B_E$, il existe $f_0 \in E^*$ telle que $f_0(x_0) \geqslant \sup_{x\in B_E} |f_0(x)|$.

2.27. Soit E un e.v.n. et $f \in E^\star$ avec $\|f\| = 1$. Montrer que pour chaque $x \in E$ on a $\mathrm{dist}(x, f^{-1}(\{0\})) = |f(x)|$. *Indication :* montrer que si $y \in f^{-1}(\{0\})$ alors $\|x - y\| \geqslant |f(x)|$; d'autre part si $y \in E$ avec $\|y\| = 1$ et $|f(y)| > 1 - \varepsilon$, alors en posant $z = x - (f(x)/f(y))y$,

$z \in f^{-1}(\{0\})$ et $\operatorname{dist}(x, f^{-1}(\{0\})) \leqslant \|x - z\| \leqslant {}^{|f(x)|}/_{(1-\varepsilon)}$.

2.28*. Montrer que $c^\star = \ell_1$. *Indication :* On observe d'abord que tout $x = (u_j) \in c$ s'écrit $x = u_0 e_0 + \sum_{j\geqslant 1}(u_j - u_0)e_j$, où $e_0 = (1, 1, \ldots)$, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (avec 1 sur la j-ième place) et $u_0 = \lim_{j\to\infty} u_j$. Alors, pour tout $f \in c^\star$, $f(x) = u_0 v_0' + \sum_{j\geqslant 1}(u_j - u_0)v_j$, où $v_0' = f(e_0)$ et $v_j = f(e_j)$, $j \geqslant 1$. On montre que $(v_j) \in \ell_1$. On pose $v_0 = v_0' - \sum_{j\geqslant 1} v_j$. On montre ensuite (comme pour c_0) que $\sum_{j\geqslant 1} |v_j| \leqslant \|f\|$. Reciproquement, si $\|y\| = |v_0| + \sum_{j\geqslant 1} |v_j| < \infty$, alors montrer que $(u_j) \mapsto v_0 \cdot \lim_{j\to\infty} u_j + \sum_{j\geqslant 1} v_j u_j$ définit une fonctionnelle linéaire bornée de norme $\leqslant \|y\|$.

2.29. Soit E un espace de Banach et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. Supposons qu'il existe $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ telle que pour tout $x \in E$, il existe K_x avec $|f_n(x)| \leqslant K_x \varepsilon_n$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$. *Indication :* utiliser le théorème de Baire.

2.30. Soit E un espace de Banach et soient $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ et $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. On suppose que :

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ fortement et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fortement

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ faiblement et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fortement

iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ fortement et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ faiblement-$\star$.

Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

2.31. Soit E un espace de Banach et soit $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^\star$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fortement. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ faiblement-$\star$.

2.32. Soit E un espace de Hilbert et soient $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ et $\{y_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$. Quelle est la convergence de la suite $\{(x_n, y_n)\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{K}$ lorsque :

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ faiblement et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ fortement

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ faiblement et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ faiblement.

2.33. Soit E un espace de Hilbert et soit $\{e_n\}_{n\geqslant 1} \subset E$ une suite orthogonale. Il y a équivalence entre

i) $\sum_{n\geqslant 1} e_n$ est convergente ;

ii) $\sum_{n\geqslant 1} e_n$ est faiblement convergente ;

iii) $\sum_{n\geqslant 1} \|e_n\|^2$ est convergente.

2.34. Soit $x = (u_j) \in \ell_2$. On définit une suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \ell_2^\star$ par $f_n(x) = f_n((u_j)) = u_n$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ faiblement-$\star$ mais pas fortement.

2.35. Soit $x \in \mathrm{L}^2[-1, 1]$ et définit une suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ par $f_n(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\cos(n\pi\, t)\, dt$.

i) Montrer que $f_n \in E^\star$ et calculer $\|f_n\|$.

ii) Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ faiblement-$\star$ mais pas fortement.

2.36. Chercher l'adjoint $T^\star$ de T lorsque :

i) $T : \mathrm{L}^2([0, 1]) \to \mathrm{L}^2([0, 1])$, $Tx(t) = \int_0^t x(s) ds$,

ii) $T : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$, $Tx(t) = \int_0^1 sx(s)ds$.

iii) $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T((u_1, u_2, \ldots)) = (u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$

iv) $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T((u_1, u_2, \ldots)) = (u_2, u_3, \ldots)$.

2.37. Soit $T_n : \ell_2 \to \ell_2$, $T((u_1, u_2, \ldots)) = (u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots)$. Montrer que $T_n \in B(\ell_2, \ell_2)$, que $T_n x \to 0$, $\forall x \in \ell_2$. Trouver $T_n^\star$ et étudier si $T_n^\star x \to 0$, $\forall x \in \ell_2$?

2.38. Supposons que $P \in B(E,E)$ avec E un espace de Hilbert. On dit que P est une projection orthogonale si $N(P) \perp R(P)$ et $P^2 = P$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) P est une projection orthogonale ;

ii) P est un opérateur auto-adjoint ;

iii) P est un opérateur normal ;

iv) $(x - Px, Px) = 0$, $\forall x \in E$;

v) $\|P\| = 1$.

Indication : pour v) $\Rightarrow$ i) démontrer et utiliser l'implication

$$x, y \in E \text{ t.q. } \|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad (x,y) = 0.$$

2.39*. Supposons que $T \in B(E,E)$ avec E un espace de Hilbert. Montrer que si T est autoadjoint alors $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \geqslant 1$ entier. *Indication :* montrer d'abord que $\|T\|^2 \leqslant \|TT^\star\| \leqslant \|T\|^2$, doù $\|T^2\| = \|T\|^2$. Vérifier ensuite que $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ et que $\|T^n\| \cdot \|T\|^{2^k - n} = \|T\|^{2^k}$, pour tout $k \geqslant 1$ entier et $1 \leqslant n \leqslant 2^k$.

2.40. Soit E un espace de Banach et $F : E \to E$. On suppose qu'il existe $q < 1$ tel que $\|F(x) - F(y)\| \leqslant q\|x - y\|$, $\forall x, y \in E$. Montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $F(x) = x$. *Indication :* construire une suite de E en posant $x_{n+1} = F(x_n)$ et étudier la convergence de cette suite.