Master et Magistère 1ère année Mathématiques 2010-2011
Probabilités de base
Espace de probabilité. Espérance des variables aléatoires.

1.1. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A,B,C\})$ où $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \emptyset$. Quelles sont les variables aléatoires réelles définies sur Ω ?

1.2. Montrer qu'une fonction réelle est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale (sur Ω) si et seulement si elle est constante.

1.3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de variables aléatoires réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ et $\liminf_{n\to\infty} X_n$ sont des variables aléatoires. En déduire que l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existe } \}$$

est un événement (c'est-à-dire est un élément de $\mathcal{A}$).

1.4. Montrer que si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements, alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{0\leqslant j<k\leqslant r} \mathrm{P}(A_j \cap A_k) \leqslant \mathrm{P}\left(\bigcup_{0\leqslant j\leqslant r} A_j\right) \leqslant \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(A_j).$$

1.5. Soit l'espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to [0,\infty[$ une application additive (c'est-à-dire $\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, lorsque $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$), telle que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) P est une probabilité (c'est-à-dire elle est σ-additive) ;
(ii) P est continue sur des suites croissantes :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

(on notera pour des telles suites croissantes $\lim_n A_n := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$) ;
(iii) P est continue sur des suites décroissantes :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

(on notera pour des telles suites décroissantes $\lim_n A_n := \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$) ;
(iv)

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0.$$

1.6. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ et on note

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant n} A_m,\ \limsup_n A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m.$$

Montrer que :

$$\mathrm{P}(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leqslant \mathrm{P}(\limsup_n A_n).$$

On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite est croissante (respectivement décroissante) alors elle est convergente et

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ (respectivement } \lim_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on a la propriété de continuité de la mesure :

$$\mathrm{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

1.7. On dit qu'un événement $A \in \mathcal{A}$ est presque sûr si A est presque sûrement égal Ω, c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$, avec N un ensemble négligeable. Soit $(A_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, une famille d'événements presque sûrs. Montrer que $\cap_{j\in J} A_j$ est presque sûr.

1.8*. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\mathcal{A}_{\mathrm{P}} = \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ tels que } A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathrm{P}(A_2 \setminus A_1) = 0\}.$$

(i) Montrer que $\mathcal{A}_{\mathrm{P}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$, où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles P-négligeables.
(ii) On définit $\bar{\mathrm{P}}$ sur $\mathcal{A}_{\mathrm{P}}$ par $\bar{\mathrm{P}}(C) = \mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2)$. Montrer que $\bar{\mathrm{P}}$ est bien définie (c'est-à-dire que sa valeur ne dépend pas du choix de A_1 et A_2. Montrer que $\bar{\mathrm{P}}$ est la seule mesure finie sur $\mathcal{A}_{\mathrm{P}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$ qui prolonge P (c'est-à-dire qui coïncide avec P sur $\mathcal{A}$).
(iii) Montrer que pour toute fonction X réelle $\mathcal{A}_{\mathrm{P}}$-mesurable, il existe deux variables aléatoires U, V réelles telles que $U \leqslant X \leqslant V$ et $V - U = 0$ P-p.s.

1.9. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
(i) $\{X \neq Y\}$ est-il un événement ? Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$|\mathrm{P}(X \in B) - \mathrm{P}(Y \in B)| \leqslant \mathrm{P}(X \neq Y).$$

(ii) On suppose que X et Y sont presque sûrement égales. Montrer qu'elles ont la même loi.

1.10*. (i) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ telles que

$$\mathrm{P}(Y \leqslant t < X) = 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathrm{P}(Y < X) = 0$.
(ii) On suppose cette fois que X et Y ont la même loi. Montrer que si $X \geqslant Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.

1.11. Soit l' espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer que les applications suivantes sont des variables aléatoires et calculer leur fonction de répartition :
(i) $X_1(\omega) = 2\omega$.
(ii) $X_2(\omega) = 2 - 2\omega$.
(iii) $Y(\omega) = \omega^2$.
(iv) $Z_1 = X_1 + X_2$.
(v) $Z_2 = X_1 + Y$.
(vi) $Z_3 = X_1 \wedge 1$.
(vii) $W(\omega) = [10\omega]$ ($[\cdot]$ désigne la partie entière).

(viii)* $U_n(\omega) = f(n\omega)$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et périodique de période 1. Montrer de plus que les U_n ont toutes la même loi.

1.12. (i) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{4}\frac{2^k}{k!}(1 + ak), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.
(ii) Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe la variable aléatoire

$$Z := \begin{cases} \frac{Y}{2}, & \text{si } Y \text{ est pair,} \\ \\ \frac{1-Y}{2}, & \text{si } Y \text{ est impair.} \end{cases}$$

Trouver la loi de Z.
(iii) Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère $U = 4[T/2] - 2T + 1$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Trouver la loi de U.
1.13. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer la densité de X. On pose $Y = e^X$, $Z = X\mathbb{1}_{\{0<X<1\}}$ et $U = \mathbb{1}_{\{0<X<1\}}$. Trouver les lois de Y, Z et U.

1.14. Soit $X \sim \mathcal{U}_{[-2,1]}$ et on pose $Y = |X|$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Y.

1.15*. On jette un point D au hasard sur le cercle centré en $O' = (\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, que pour tout arc $\mathcal{A}$, $\mathrm{P}(D \in \mathcal{A})$ est proportionnel à la longueur de $\mathcal{A}$. On note aussi le point $C = (1, 0)$.
(i) Calculer le coefficient de proportionnalité. On note Θ la mesure de l'angle $(\widehat{O'C, O'D})$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$. Quelle est la loi de Θ ?
(ii) On pose $D = (X, Y)$. Trouver la loi de X (loi arcsinus).

1.16. Soient $n \geqslant 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}, & \text{si } i + j \leqslant n, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

(i) Montrer qu'il existe un couple (X, Y) tel que $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$.
(ii) Trouver les lois de X et de Y.

1.17. Le couple aléatoire (X, Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = cy\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

(i) Calculer c.
(ii) Trouver les densités marginales de X et de Y.

Mêmes questions pour

$$g(x,y) = c(x+3y)e^{-x-2y}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y).$$

1.18. Le couple aléatoire (X,Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x,y), \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

(i) Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant 1/\sqrt{2})$, $\mathrm{P}(Y \geqslant 1/\sqrt{2})$, puis $\mathrm{P}(X \geqslant 1/\sqrt{2}, Y \geqslant 1/\sqrt{2})$.
(ii) Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant Y)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant \lambda Y)$.
(iii) Trouver les marginales de X et de Y.
(iv) Soient a, b deux réels égaux à ± 1. Montrer que (X,Y) a la même loi que (aX,bY). Montrer que (X,Y) a la même loi que (Y,X).
(v) On note (R,Θ) les coordonnées polaires de (X,Y). Trouver la loi du couple (R,Θ) et ses marginales.

1.19. Soit le couple aléatoire (X,Y). On note $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$, avec f, g boréliennes positives. Quelles hypothèses doivent vérifier f et g pour que φ puisse être la densité du couple (X,Y) ? Calculer alors les densités marginales de X et Y et vérifier que φ est le produit de ces densités.

1.20. Soit la fonction de Laplace

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

i) Vérifier que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}(1+1/t^2)dt.$$

ii) En déduire, pour $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

iii) Prouver que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\left(1 - \frac{3}{t^4}\right)dt.$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

iv) Prouver que :

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \text{ lorsque } x \to \infty.$$

1.21. Calculer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique des variables aléatoires décrites dans les exercices **1.11**, **1.12**, **1.13**, **1.14**, **1.16**, **1.18**.

1.22. Une urne contient r boules dont 2 rouges et $r-2$ noires. On effectue r tirages sans remise et on note X le rang du premier tirage d'une boule rouge et Y le rang du second tirage.
(i) Trouver la loi de (X, Y) et de ses marginales.
(ii) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

1.23 (i) Une personne a n clés dans sa poche et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle prend au hasard les clés les unes après les autres et les essaye. On note X le nombre de clés qu'elle essaye avant de trouver la bonne. En supposant qu'une clé une fois essayée est ensuite mise de côté, quelle est la probabilité que cette personne tire la bonne clé à la k-ème tentative ? Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?
(ii) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait ces boules de l'urne les unes après les autres, au hasard et sans remise, et on note R_k le numéro porté par la k-ème boule tirée de l'urne. Donner la loi de R_k, son espérance et sa variance.
(iii) On note $W_N = R_1 + \ldots + R_N$. Calculer l'espérance de W_N. Trouver la loi du couple (R_j, R_k), $j \neq k$, et montrer qu'elle ne dépend pas de (j, k). Calculer $\mathrm{E}(W_N^2)$, $\mathrm{E}(R_j R_k)$, puis la variance de W_N.

1.24. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X décrite dans l'exercice **1.12 (i)** en remarquant que

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(\xi = k) + \frac{3}{4}\mathrm{P}(\eta = k),\ \forall k \in \mathbb{N},$$

où $\eta = \zeta + 1$ et où ξ et ζ sont deux variables de loi $\mathcal{P}(2)$.

1.25. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(i) On note $Y = \inf\{X, n\}$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.
(ii) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire succesivement et avec remise à chaque fois une boule de l'urne et on cesse les tirages dès qu'une boule rouge est sortie. On désigne par Z le nombre de boules noires obtenues pendant l'expérience. Calculer $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

1.26. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X. Soit ϕ une fonction positive, croissante de classe C^1 sur $[0, \infty[$, nulle en 0.
(i) Montrer que

$$\mathrm{E}(\phi(X)) = \int_0^\infty \phi'(t)(1 - F_X(t))dt.$$

(ii) On suppose que $\phi(X)$ est intégrable. Montrer que

$$\lim_{t \uparrow \infty} \phi(t)\mathrm{P}(X > t) = 0.$$

Cas particulier $\phi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.27. Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = c\left[x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2 - x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x)\right].$$

Calculer c, $\mu_n(X)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Var}(X)$.

1.28. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on note $Y = X^2$. Trouver la loi de Y et calculer son espérance.

1.29. On pose
$$f(x,y) = \frac{c}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(3x^2 - 3xy + y^2)\right].$$
(i) Déterminer c pour que f soit la densité d'un couple aléatoire (X,Y).
(ii) Trouver les lois marginales et calculer le vecteur espérance et la matrice de covariance de (X,Y).

1.30*. **(i)** Soit $X \sim \gamma(p,\lambda)$. Montrer que $X \in \mathrm{L}^r$, pour $1 \leqslant r < \infty$, mais que $X \notin \mathrm{L}^\infty$. Mêmes questions pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(ii) Soit Y une variable aléatoire de densité
$$f_Y(x) = \frac{p}{x^{p+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x),\ p \geqslant 1.$$
Montrer que $Y \in \mathrm{L}^r$, pour $r < p$ et que $Y \notin \mathrm{L}^p$.
(iii) Construire une variable Z telle que $Y \in \mathrm{L}^p$ et $Y \notin \mathrm{L}^r$, pour tout $r > p$.

1.31. Soit X une variable aléatoire réelle telle que pour tout $t \geqslant 1$,
$$\mathrm{P}(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{c}{t^\alpha},$$
où $c > 0$ et $\alpha > 1$. Montrer que X admet un moment d'ordre k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k < \alpha$.

1.32. Soient $p,q,r \in]0,\infty[$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer que si $X \in \mathrm{L}^p$ et $Y \in \mathrm{L}^q$, alors $XY \in \mathrm{L}^r$ et on a
$$\|XY\|_r \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q.$$
1.33. Montrer que la fonction caractéristique est à valeurs réelles si et seulement si X et $-X$ ont la même loi.

1.34. Montrer que la conjuguée et la partie réelle d'une fonction caractéristique sont aussi des fonctions caractéristiques.

1.35. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0,1]$. Montrer que $p\varphi + (1-p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

1.36. Soit la fonction
$$f(x,y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4} \mathbb{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y).$$
(i) Montrer qu'il existe un couple aléatoire (X,Y) à valeurs p.s. dans $[-1,1]$ de densité f.
(ii) Trouver les lois et les fonctions caractéristiques de X et Y.

1.37. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathrm{E}(e^{\lambda X}) < \infty$, pour $\lambda > 0$ (ou seulement $0 < \lambda < \lambda_0$). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(X \geqslant t) \leqslant e^{-I_X(t)},$$

où $I_X(t) := \sup_\lambda \big(\lambda t - \ln \mathrm{E}(e^{\lambda X})\big)$.

1.38. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(i) Trouver la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer $\mu_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(ii) On note Y_a, $|a| \leqslant 1$, la variable aléatoire de densité

$$f_{Y_a}(x) = f_Y(x)\,(1 + a \sin 2\pi \ln x)\,.$$

Calculer $\mu_n(Y_a)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(iii) En déduire que les moments ne caractérisent pas la loi de probabilité.

1.39. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. Calculer $\mathrm{E}(F_X(X))$.

1.40. On considère la fonction réelle

$$u(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

(i) Soit X une variable réelle. On considère, pour $s \geqslant 0$,

$$\theta_X(s) := \mathrm{E}(u(sX)).$$

Montrer que θ_X est continue sur $[0,\infty[$, de classe C^1 sur $]0,\infty[$. Exprimer $\theta'_X(s)$ comme une espérance. Déterminer $\lim_{s\to\infty} \theta_X(s)$.
(ii) Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $c \in]0,1[$. On considère la variable aléatoire $X = (U-c)^+$. Calculer, pour la variable X, $\theta_X(s)$ puis $\lim_{s\to\infty} \theta_X(s)$. Est-ce cohérent avec la question précédente ?