Licence de Mathématiques 2000-2001

Probabilités

1. Espace de probabilité

1.1. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu et dire combien d'éléments elle a si Ω possède r éléments.

1.2. Montrer qu'une tribu est stable par intersection dénombrable, par réunion finie, par intersection finie. Montrer qu'on peut remplacer l'axiome de stabilité par réunion dénombrable par l'axiome de stabilité par intersection dénombrable.

1.3. Montrer que l'intersection d'un nombre quelconque de tribus est une tribu; en déduire qu'il existe une seule tribu, minimale pour l'inclusion, dans l'ensemble des tribus contenant un sous-ensemble donné $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1.4. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A,B,C\})$ où $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \emptyset$. Quelles sont les variables aléatoires réelles définies sur Ω?

1.5. Montrer que sur $\mathbb{R}$, la tribu engendrée par les parties fermées est égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.6. Montrer que la tribu borélienne coïncide avec la tribu engendrée par les intervalles $]a,b[$ ou par les intervalles $]-\infty,b]$, où $-\infty < a < b < \infty$. Même question lorsqu'on suppose seulement $a,b \in \mathbb{Q}$, $a < b$.

1.7. On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu engendrée par les singletons. Montrer que cette tribu coïncide avec la tribu

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ou } A^c \text{ soit au plus dénombrable}\}.$$

1.8. Montrer qu'une fonction est mesurable par rapport à la tribu triviale (sur Ω) si et seulement si elle est constante.

1.9. Soit X une fonction de l'espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ dans l'espace mesurable $(E,\mathcal{B})$. Montrer que $\mathcal{A}' = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ et $\mathcal{B}' = \{B : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ sont des tribus mais que $X(\mathcal{A}) = \{X(A) : A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas une tribu en général.

1.10. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ et $\liminf_{n\to} X_n$ sont des variables aléatoires. En déduire que l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existe } \}$$

est un événement (c'est-à-dire est un élément de $\mathcal{A}$).

1.11. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une tribu sur l'ensemble de départ telles que $|f|$ soit borélienne sans f le soit.

1.12. Montrer que si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements, alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{P}(A_j) - \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant r} \mathrm{P}(A_j \cap A_k) \leqslant \mathrm{P}\left(\bigcup_{0\leqslant j\leqslant r} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \mathrm{P}(A_j).$$

1.13. Soit l'espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to [0,\infty[$ une application additive (c'est-à-dire $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, lorsque $A,B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$), telle que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes:
(i) P est une probabilité (c'est-á-dire elle est σ-additive);
(ii) P est continue sur des suites croissantes :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

(on notera pour des telles suites croissantes $\lim_n A_n := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$);
(iii) P est continue sur des suites décroissantes :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

(on notera pour des telles suites décroissantes $\lim_n A_n := \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$);
(iv)

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0.$$

1.14. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ et on note

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant n} A_m, \ \limsup_n A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m.$$

Montrer que:

$$\mathrm{P}(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leqslant \mathrm{P}(\limsup_n A_n).$$

On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite est croissante (respectivement décroissante) alors elle est convergente et

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ (respectivement } \lim_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on a la propriété de continuité de la mesure μ:

$$\mathrm{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

1.15. On dit qu'un événement $A \in \mathcal{A}$ est presque sûr si A est presque sûrement égal Ω, c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$, avec N un ensemble négligeable. Dire pourquoi N est un événement et calculer sa probabilité. Soit $(A_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, une famille d'événements presque sûrs. Montrer que $\cap_{j\in J} A_j$ est presque sûr.

1.16. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{P}} = \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1,A_2 \in \mathcal{A}, \text{ tels que } A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathrm{P}(A_2 \setminus A_1) = 0\}.$$

(i) Montrer que $\mathcal{A}_{\mathrm{P}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$, où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles P-négligeables.
(ii) On définit $\bar{\mathrm{P}}$ sur $\mathcal{A}_{\mathrm{P}}$ par $\bar{\mathrm{P}}(C) = \mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2)$. Montrer que $\bar{\mathrm{P}}$ est bien définie (c'est-à-dire que sa valeur ne dépend pas du choix de A_1 et A_2. Montrer que $\bar{\mathrm{P}}$ est la seule mesure finie sur $\mathcal{A}_{\mathrm{P}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$ qui prolonge P (c'est-à-dire qui coïncide avec P sur $\mathcal{A}$).
(iii) Montrer que pour toute fonction X réelle $\mathcal{A}_{\mathrm{P}}$-mesurable, il existe deux variables aléatoires U,V réelles telles que $U \leqslant X \leqslant V$ et $V - U = 0$ $\mathrm{P} - p.s.$

1.17. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.
(i) $\{X \neq Y\}$ est-il un événement? Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$|\mathrm{P}(X \in B) - \mathrm{P}(Y \in B)| \leqslant \mathrm{P}(X \neq Y).$$

(ii) On suppose que X et Y sont presque sûrement égales. Montrer qu'elles ont la même loi.

1.18. **(i)** Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ telles que

$$\mathrm{P}(Y \leqslant t < X) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathrm{P}(Y < X) = 0$.
(iii) On suppose cette fois que X et Y ont la même loi. Montrer que si $X \geqslant Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.

1.19. Une urne contient des boules noires et des boules rouges. On tire au hasard et avec remise à chaque fois, une boule de l'urne. On effectue une série "infinie" de tirages. Montrer que l'événement "obtenir à chaque fois une boule de couleur noire" est négligeable.

1.20. Soit X une variable aléatoire vérifiant

$$\mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{6}, \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \mathrm{P}(X = 4) = \frac{1}{3}.$$

Tracer le graphe de la fonction de répartition de X.

1.21. Soit l' espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P}) = ([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. Montrer que les applications suivantes sont des variables aléatoires et calculer leur fonction de répartition:
(i) $X_1(\omega) = 2\omega$.
(ii) $X_2(\omega) = 2 - 2\omega$.
(iii) $Y(\omega) = \omega^2$.
(iv) $Z_1 = X_1 + X_2$.
(v) $Z_2 = X_1 + Y$.
(vi) $Z_3 = X_1 \wedge 1$.
(vii) $W(\omega) = [10\omega]$ ($[\cdot]$ désigne la partie entière).
(viii)* $U_n(\omega) = f(n\omega)$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et périodique de période 1. Montrer de plus que les U_n ont toutes la même loi.

1.22. **(i)** Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle

$$Y(\omega) := a,\ \forall \omega \in \Omega.$$

(ii) Supposons que pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{P}(A) = 0$ ou $\mathrm{P}(A) = 1$. Montrer alors que toute variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ est p.s. constante.

1.23. **(i)** Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que:

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{4}\frac{2^k}{k!}(1 + ak),\ \forall k \in \mathbb{N},$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.

(ii) Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe la variable aléatoire

$$Z := \begin{cases} \frac{Y}{2}, & \text{si } Y \text{ est pair,} \\ \\ \frac{1-Y}{2}, & \text{si } Y \text{ est impair.} \end{cases}$$

Trouver la loi de Z.

(iii) Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère $U = 4[T/2] - 2T + 1$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Trouver la loi de U.

1.24. **(i)** Soit

$$f(x) = \frac{c}{(1+x)^2}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x).$$

Calculer c pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. Calculer sa fonction de répartition. En déduire $\mathrm{P}(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

(ii) Mêmes questions pour

$$g(x) = \frac{c}{x^p}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x),\ \text{où } p > 1.$$

1.25. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer la densité de X. On pose $Y = e^X$, $Z = X\mathbb{1}_{\{0<X<1\}}$ et $U = \mathbb{1}_{\{0<X<1\}}$. Trouver les lois de Y, Z et U.

1.26. La durée T d'une communication téléphonique est une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{[0,\infty[}(t),\ \text{où } \lambda > 0.$$

Calculer, pour $a,b,h > 0$, $\mathrm{P}(X < 0)$, $\mathrm{P}(a \leqslant X)$, $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$. X possède-t-elle une densité?

1.27. Soit X variable aléatoire positive de densité f telle que $f(x) > 0$ si $x > 0$, et de fonction de répartition F. On regarde X comme la durée de vie d'un composant; son taux de panne à l'instant $t > 0$ est défini par

$$r(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{P}(t \leqslant X < t+h)}{h\mathrm{P}(t \leqslant X)}.$$

(i) Calculer r en termes de F et f et réciproquement. Donner une condition nécessaire et suffisante sur r pour que $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.
(ii) Déterminer les densités correspondant aux taux de panne constants.
(iii) Calculer f et F lorsque $r(t) = kt^{\alpha-1}$, $t > 0$, $k,\alpha > 0$ (loi de Weibull).

1.28. Soit $X \sim \mathcal{U}_{[-2,1]}$ et on pose $Y = |X|$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Y.

1.29. Quelle est la densité de la variable aléatoire $Y = aX + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, lorsque la densité de la variable aléatoire réelle X est f?

1.30. On jette un point D au hasard sur le cercle centré en $O' = (\frac{1}{2},0)$ de rayon $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, que pour tout arc $\mathcal{A}$, $\mathrm{P}(D \in \mathcal{A})$ est proportionnel à la longueur de $\mathcal{A}$. On note aussi le point $C = (1,0)$.
(i) Calculer le coefficient de proportionnalité. On note Θ la mesure de l'angle $(\widehat{O'C,O'D})$ qui appartient à $]-\pi,\pi]$. Quelle est la loi de Θ?
(ii) On pose $D = (X,Y)$. Trouver la loi de X (loi arcsinus).

1.31. Soient f,g deux fonctions boréliennes, bornées, définies sur $[0,1]$. On suppose que pour tout intervalle $I \subset [0,1]$,

$$\int_0^1 \mathbb{1}_I(x)f(x)dx = \int_0^1 \mathbb{1}_I(x)g(x)dx.$$

Montrer que $f = g$ presque partout. Que peut-on dire lorsque f,g sont continues (à droite)?

1.32. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$, pour tout $I \in \mathcal{I}$. Montrer que X est une variable aléatoire.

1.33. Soient $n \geqslant 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\, p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}, & \text{si } i + j \leqslant n, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

(i) Montrer qu'il existe un couple (X,Y) tel que $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$.
(ii) Trouver les lois de X et de Y.

1.34. Le couple aléatoire (X,Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = cy\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

(i) Calculer c.
(ii) Trouver les densités marginales de X et de Y.
Mêmes questions pour

$$g(x,y) = c(x+3y)e^{-x-2y}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y).$$

1.35. Le couple aléatoire (X,Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x,y), \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

(i) Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathrm{P}(Y \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$, puis $\mathrm{P}(X \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, Y \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$.
(ii) Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant Y)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant \lambda Y)$.
(iii) Trouver les marginales de X et de Y.
(iv) Soient a, b deux réels égaux à ± 1. Montrer que (X,Y) a la même loi que (aX,bY). Montrer que (X,Y) a la même loi que (Y,X).
(v) On note (R,Θ) les coordonnées polaires de (X,Y). Trouver la loi du couple (R,Θ) et ses marginales.

1.36. Soit le couple aléatoire (X,Y). On note $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$, avec f, g boréliennes positives. Quelles hypothèses doivent vérifier f et g pour que φ puisse être la densité du couple (X,Y)? Calculer alors les densités marginales de X et Y et vérifier que φ est le produit de ces densités.

1.37. Soit

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

i) Vérifier que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2} (1 + 1/t^2) dt.$$

ii) En déduire, pour $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

iii) Prouver que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{3}{t^4} \right) dt.$$

En déduire que, pour $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

iv) Prouver que:

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \text{ lorsque } x \uparrow \infty.$$