Sujet d'écrit blanc du 8 janvier 2018

- durée 4h ; sans documents ni calculatrice -
- il faut aborder au minimum un exercice d'algèbre et un problème d'analyse -

Partie algèbre : Cette partie est composée de trois exercices indépendants

Exercice 1 *Autour de certaines sommes d'entiers*

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.
2. Réciproquement, on se donne une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2$. Montrer que pour tout entier k on a $a_k = k$. On pourra faire une récurrence.
3. Soit p un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. On suppose que pour $n \geq 1$, S_n est un carré. Montrer que nécessairement $p = 3$.
   On pourra étudier S_2.

Exercice 2 *Sous-groupes, arithmétique et géométrie*

Soit G un groupe multiplicatif (le produit de a par b est simplement noté ab). On ne suppose pas que le produit est commutatif.

1. Pour toute partie A de G on note $\mathcal{C}(A) = \{x \in G, \forall a \in A, ax = xa\}$.
   (a) Pour toute partie A de G, montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-groupe de G.
   (b) Soient A, B deux parties de G telles que $A \subset B$. Comparer $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(B)$ pour l'inclusion.
   (c) Soit A une partie quelconque de G, comparer A et $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ pour l'inclusion.
   (d) Pour toute partie A de G, montrer que : $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))) = \mathcal{C}(A)$.
   On pourra utiliser successivement (c), (b) et encore une fois (c).
2. On note e l'élément neutre et on suppose qu'il existe a et b distincts dans G, différents de e, tels que : $ab = ba^{-1}$.
   (a) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a $a^j b = ba^{-j}$.
   (b) Montrer que pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$ on a : $a^j b^k = b^k a^{(-1)^k j}$. On pourra introduire une proposition $\mathcal{P}_k$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et la vérifier par récurrence croissante et décroissante.
   (c) Soit $H = \{a^j b^k : (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par a, b, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe de G contenant $\{a, b\}$.

Tournez S.V.P.

(d) On suppose qu'il existe des entiers u et v dans $\mathbb{N}^*$ tels que $a^u = e$ et $b^v = e$. On note $n = \min\{u \in \mathbb{N}^* : a^u = e\}$ et $m = \min\{v \in \mathbb{N}^* : b^v = e\}$ et on suppose en outre que m et n sont premiers entre eux.

i. Pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$a^u = e \Leftrightarrow (u \text{ est un multiple de } n) \quad \text{et} \quad b^v = e \Leftrightarrow (v \text{ est un multiple de } m).$$

ii. Montrer que pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$ on a

$$a^j = b^k \Rightarrow (j \in n\mathbb{Z} \text{ et } k \in m\mathbb{Z}).$$

iii. Montrer que $\varphi : (j,k) \mapsto a^j b^k$ est bijective de $\{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, m-1\}$ sur H. On pourra lors de l'étude de la surjectivité faire les divisions euclidiennes de j par n et de k par m. Combien H contient-il d'éléments ?

3. Soit G le groupe de bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Les applications

$$z \mapsto \rho(z) = jz, \ \text{ où } \ j = \exp\left(\frac{2\,i\pi}{3}\right), \qquad \text{et} \qquad z \mapsto \sigma(z) = \bar{z}$$

sont deux éléments de G. Montrer que ρ et σ satisfont les conditions du point 2 précédent. Calculer le cardinal du sous-groupe H de G engendré par ρ et σ. Interpréter géométriquement chaque élément de H.

Exercice 3 *Une suite de polynômes*

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit

$$T_0(X) = 1, \ \ T_1(X) = X \qquad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5.
2. Montrer que pour tout entier n, T_n est de degré n avec terme dominant $2^{n-1}X^n$, que T_n a la parité (en tant que fonction) de n et que $T_n(1) = 1$.
3. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \leq n \Longrightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
4. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$. En déduire un isomorphisme entre $\mathbb{N}$ (avec la multiplication) et $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ (avec la composition).
5. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout entier n, $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh\alpha) = \cosh(n\alpha)$.
6. Établir que, pour tout $n \geq 1$ les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans]-1,1[, et qu'ils sont donnés par $\forall k = 0, \dots, n-1$, $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.
   On pourra remarquer que pour tout $x \in]-1,1[$ il existe un $\alpha \in]0,\pi[$ tel que $x = \cos\alpha$.
7. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n'(\cos\alpha) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$. En déduire les extremums de T_n (avec $n \geq 2$) et en quels points ils sont atteints.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 - X^2)T_n'' - X\,T_n' + n^2T_n = 0$.

Tournez S.V.P.

Partie analyse : Cette partie est composée de deux problèmes indépendants

Problème A. *Première répétition*

I. Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$ prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, du.$$

3. Soit y un réel strictement positif. On pose $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} y^n$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \quad \text{puis que} \quad T_n(x) \sim e^{nx} \ \text{ quand } n \to \infty.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ pour tout n entier naturel.
   On pourra faire une récurrence.
6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ quand $n \to \infty$.
   On pourra l'écrire $(ue{-}u)^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ pour $u \geq x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite.

II. Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt = \sqrt{2\pi}.$

Tournez S.V.P.

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

$$f(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad \forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ 0 < f(x) < 1, \text{ et}$$

$$\text{les nombres } f(-1), f(1) \text{ appartiennent à l'intervalle } [0,1[.$$

Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\big(f(x)\big).$$

1. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$. On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.
2. Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$ on ait
$$f(x) \leq e^{-ax^2}.$$
On pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $\{g_n, n \geq 1\}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g (en d'autres termes que pour chaque $u \in \mathbb{R}$, $g_n(u)$ converge vers $g(u)$) telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$
4. En déduire que
$$\int_{-1}^{1} (f(x))^n \, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

III. Formule de Stirling

On redémontre dans cette partie la formule de Stirling.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question I.5 que $n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n)$, avec
$$I_n := \int_{-1}^{1} (1+x)^n e^{-n(x+1)} \, dx \quad \text{et} \quad J_n := \int_{1}^{+\infty} (1+x)^n e^{-n(x+1)} \, dx.$$
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x + 1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n.
3. En appliquant la méthode de Laplace (cf. III précédent), donner un équivalent de I_n.
4. En déduire que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Tournez S.V.P.

IV. Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ de la section I.

1. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\, dt.$$

2. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}.$$

V. Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n=5$, si les 6 tirages donnent successivement $3-2-1-5-2-3$, on pose $X=5$. Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1,\ldots,n\}^{n+1}$ et on admet que

$$P(X=k) = \frac{A_k}{\mathrm{Card}(\Omega)} \quad \text{où} \quad A_k = \mathrm{Card}(X^{-1}(\{k\}))$$

puisque le tirage d'un élément ω de Ω est uniforme.

1. Montrer que pour $k \in \{2,\ldots,n+1\}$, l'événement $\{X=k\}$ est de probabilité non nulle.
   On pourra montrer que cet événement est non-vide.
2. Pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, montrer que

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k) P(X > k).$$

3. En déduire que, pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, $P(X > k) = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$.
4. Établir l'identité suivante : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X>k)$. On pourra écrire $k = \sum_{i=0}^{k-1} 1$.
5. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $E(X)$ lorsque $n \to +\infty$.

Tournez S.V.P.

Problème B. *Approximation de* π^2

I. Étude d'une application donnée par une intégrale

Dans cette partie on étudie l'application $x \mapsto f(x) = x \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{u\ du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ *pour tout* $x > 0$.

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $I_1(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2x}$.
2. Calculer $I_2(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin u\ du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$, pour tout réel $x > 0$.
   On sera amené à considérer les cas $0 < x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$.
   Vérifier que $I_2(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f(x) + f\left(1/x\right) = \pi^2/4$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} x I_2(x)$.
   En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Dans cette question on établit la dérivabilité de l'application f.
   (a) On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{u\ du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ et $\Delta(u) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{-u\cos^2 u\ du}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}$.

   On se donne un réel $x > 0$, et un réel h tel que $|h| < x/2$. Montrer qu'on a la majoration :

   $$\left|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \Delta(x)\right| \leq |h| \int_0^{\pi/2} \frac{u\cos^4 u\ du}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$

   Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a(u) = x^2\cos^2 u + \sin^2 u$.
   En déduire que Φ est dérivable au point x.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\ du$.

   (c) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin u \cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\ du$.

   (d) Prouver finalement que pour tout $x \neq 1$ on a $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.
   L'application f' est-elle prolongeable par continuité en $x = 1$?
6. Dans cette question, on aboutit à une nouvelle expression de l'application f. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\ dt$.
   Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative.

Tournez S.V.P.

II. Approximation de π^2

1. Pour tout m de $\mathbb{N}$, montrer que : $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\, dt.$

2. Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\, dt \leq \frac{K}{2m+2}$.

   En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. En déduire que $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

4. Dans cette question, on pose $h(t) = \dfrac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$ et $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} h(n)$. Ainsi on a $\pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

   (a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante.

   (b) Pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, prouver les inégalités : $\displaystyle\int_{p+1}^{\infty} h(t)\, dt \leq R_p \leq \int_p^{\infty} h(t)\, dt.$

   (c) En déduire que pour tout $p \geq 1$ on a $\dfrac{1}{6(p+2)^3} \leq R_p \leq \dfrac{1}{6p^3}$.

   (d) Montrer que si on utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}$ on commet ainsi une erreur majorée par $\dfrac{1}{p^4}$.

FIN DU SUJET