Examen de TP

L'examen de TP est à rendre avant le mardi 13 décembre 2016, sous la forme d'un seul fichier intitulé `CMMA_NomPrénom.sce`, incluant tout ce que vous avez fait dans les deux exercices (et structuré clairement), à envoyer à l'une des deux adresses `guillaume.poly@univ-rennes1.fr` ou `blandine.dubarry@univ-rennes1.fr`.

1 - Mise à l'échelle d'une marche aléatoire

On considère une marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{Z}$, définie par $S_0 = 0$ et

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

où $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi $\mathcal{X}$ centrée de carré intégrable.

1. a. Écrire une fonction `marche1(`n`)` qui retourne le vecteur $(S_0, S_1, \dots, S_n)$, lorsque $\mathrm{P}(X_1 = -1) = 0.5$ et $\mathrm{P}(X_1 = 1) = 0.5$, en utilisant la fonction Scilab `grand`.

   b. Même question sans utiliser la fonction `grand`.
2. Écrire une fonction `marche2(`n, σ^2`)` qui retourne le vecteur $(S_0, S_1, \dots, S_n)$, lorsque $\mathcal{X} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
3. Tracer sur un même graphe deux réalisations de la marche aléatoire générée à la question précédente, pour $n = 50$ et $s^2 = 2$, en bleu et rouge.

Dans la suite, on considèrera que $\mathcal{X}$ est la loi de Rademacher. Autrement dit, $\mathcal{X} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, et on est dans le contexte de la question 1. On pourra donc générer des réalisations de S_n à l'aide de la fonction `marche1`.

On s'intéresse à la fonction $Z_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ qui, à n fixé, est définie de la manière suivante :

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(S_{\lfloor nt \rfloor} - (nt - \lfloor nt \rfloor)X_{\lfloor nt \rfloor}\Big),$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. On peut définir Z_n de manière alternative comme l'interpolation linéaire des points de coordonnées $(kn^{-1}, S_k n^{-1/2})$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

4. Écrire une fonction `interpo(`S_n, t`)` qui retourne $Z_n(t)$ en fonction d'une réalisation de S_n préalablement générée, pour $t \in [0,1]$.
5. Générer une réalisation de S_{50}, puis tracer sur $[0,1]$ la réalisation de Z_{50} associée.

6. Tracer successivement, pour $n = 50, 100, 500$ et 1000, une réalisation de la fonction Z_n sur $[0, 1]$.
7. On notera que, à t fixé, $Z_n(t)$ est une variable aléatoire (on dit que Z_n est un *processus stochastique*).
   a. Estimer, lorsque $n \to \infty$, la loi limite de la variable aléatoire $Z_n(0.5)$.
   b. Conjecturer la loi limite, lorsque $n \to \infty$, de la variable aléatoire $Z_n(t)$, pour $t \in [0, 1]$.
8. $\boxed{\text{Bonus}}$ Conjecturer, lorsque $n \to +\infty$, la limite de Z_n.

2 - Chaîne de Markov et loi du χ^2

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$ associée à la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

1. Simuler la chaîne de Markov et tracer une trajectoire jusqu'à $n = 100$.
2. La chaîne est-elle irréductible ? apériodique ?
3. Calculer une valeur approchée de la mesure invariante μ en utilisant les puissances de la matrice de transition P. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de ${}^tP$ (avec Scilab, pas à la main). Comparer les résultats.

On définit pour $(i, j) \in E^2$ les temps d'occupation suivants :

$$N_n^i = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k=i)} \quad \text{et} \quad N_n^{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k=i, X_{k+1}=j)}.$$

4. Vérifier par la simulation que $\frac{1}{n}N_n^i \longrightarrow \mu(i)$ et $\frac{1}{n}N_n^{ij} \longrightarrow \mu(i)P(i,j)$. Comment estimer μ à partir de l'observation d'une trajectoire $(X_0, \cdots, X_n)$?

On définit

$$D_n = \sum_{k=1}^{4} \frac{\left(N_n^i - n\mu(i)\right)^2}{n\mu(i)}.$$

5. Tracer l'histogramme empirique.
6. Estimer l'espérance de D_n. Soit m l'entier le plus proche de l'espérance trouvée. Comparer l'histogramme avec la densité de la loi du chi-deux dont le degré de liberté est m.