Contrôle continu # 3

le 5 mai 2024 ; durée 1h30 ; aucun document autorisé ; le sujet comporte deux pages

Exercice 1 *Question de cours ou presque*
Soient $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que si X_n converge p.s., ou en probabilité, ou en loi vers X_∞, une variable aléatoire réelle, alors $h(X_n)$ converge respectivement p.s., ou en probabilité, ou en loi vers $h(X_\infty)$.

Indication. Pour la convergence en probabilité on pourra utiliser un résultat de cours de caractérisation de la convergence en probabilité (sans le démontrer) ou, alternativement, considérer d'abord le cas où h est uniformément continue et ensuite renoncer à l'uniformité, tout en remarquant que $\lim_{R\to\infty} \mathbb{P}(|X_j| > R) = 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, \infty\}$.

Exercice 2 *Caractérisation de la loi gaussienne*
On note φ la fonction caractéristique de la loi commune de deux variables aléatoires indépendantes W_1, W_2, de carrés intégrables, centrées et réduites (d'espérance nulle et de variance 1).

1. On suppose que la loi commune est $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\frac{W_1+W_2}{\sqrt{2}} \sim W_1 \sim W_2$ (même loi). On pourra donner l'expression de φ dans ce cas.
2. On ne suppose plus connue la loi commune, mais que $\frac{W_1+W_2}{\sqrt{2}} \sim W_1 \sim W_2$. On veut déduire une réciproque du point précédent.
   a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\frac{t}{\sqrt{2}})^2 = \varphi(t)$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ entier et tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\frac{t}{\sqrt{2^n}})^{2^n} = \varphi(t)$.
   b) On considère maintenant $W_3, W_4, W_5, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que W_1 et W_2 et aussi indépendantes de ces deux dernières. On note $S_n = W_1 + \ldots + W_n$. Pour $n \geq 1$ entier, calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\dfrac{S_{2^n}}{\sqrt{2^n}}$.
   c) Utiliser un de deux grands théorèmes de probabilité, après avoir justifié son application, pour calculer la limite en loi de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, lorsque $n \to \infty$.
   d) Utiliser les points b) et c) précédents pour conclure que la loi commune est nécessairement la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 3 *Suite de jeux de pile ou face*
La probabilité qu'une pièce montre pile lors d'un lancer est $p \in]0,1[$. On lance cette pièce $n \geq 1$ fois et on note respectivement P et F les nombres de piles et de faces obtenus lors de ces lancers.

1. On fixe n, le nombre de lancers.
   (a) Quelles sont les lois de P et de F ? Que vaut $P + F$?
   (b) Montrer que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[s^P t^F] = \big(ps + t(1-p)\big)^n$. En déduire les expressions de $\mathbb{E}[s^P]$ et $\mathbb{E}[t^F]$.
   (c) Justifier de deux façons que les variables aléatoires P et F ne sont pas indépendantes ?

Tournez la page S.V.P.

2. On fait maintenant varier n et on notera les variables P et F par P_n et F_n.
   (a) Justifier pourquoi P_n/n tend en probabilité, lorsque $n \to \infty$, vers une valeur qu'on précisera.
   (b) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2p-1-\varepsilon \leq \frac{1}{n}(P_n - F_n) \leq 2p-1+\varepsilon\right) = 1.$$

   Indication. Utiliser la valeur de la somme $P_n + F_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$ entier, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+P_n}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

   Indication. On pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{1+u} = \displaystyle\int_0^1 s^u ds$ et le résultat de la question 1(b).
4. On suppose enfin que $p = \lambda/n$ $(0 < \lambda < n)$.
   (a) Montrer que P_n converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
   (b) Calculer de deux manières différentes, tout en justifiant la possibilité, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+P_n}\right]$.