Université de Rennes | L3 Mathématiques
Probabilités | année 2023-2024

Contrôle continu # 3

le 7 mai 2024 ; durée 1h30 ; aucun document autorisé ; le sujet comporte deux pages

Exercice 1 *Questions de cours ou presque*
Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même fonction caractéristique φ. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. On suppose que les variables X_n sont intégrables. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \to \infty$, $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \big(1 + \frac{itm}{n} + o(\frac{|t|}{n})\big)^n$ où on a noté $m = \mathbb{E}(X_1)$. On pourra justifier et donner un développement limité à l'ordre 1 de φ.
2. Énoncer la loi faible des grands nombres. Fournir une démonstration basée sur la formule du point précédent. On justifiera soigneusement en énonçant tous les résultats utilisés (sans les démontrer).
3. Dans cette question on veut démontrer une réciproque de la loi forte des grands nombres. On suppose encore que les variables aléatoires $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et on fait l'hypothèse que $\{\frac{S_n}{n}\}_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y.
   (a) En remarquant que $X_n = S_n - S_{n-1}$, montrer que la suite $\{\frac{X_n}{n}\}_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
   (b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\Big(\frac{|X_1|}{\varepsilon} \geq n\Big)$ est convergente.
   (c) Conclure que la variable aléatoire X_1 est intégrable (et donc elles le sont toutes).

   Bonus : Expliquer pourquoi Y est forcement une variable aléatoire p.s. constante.

Exercice 2 *Des limites de suites de variables aléatoires*
Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, on considère la variable aléatoire $U(\omega) := \omega - 1$.

1. Trouver la fonction de répartition de U. Cette variable est-elle à densité ? discrète ?
2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $U \in \mathrm{L}^p$ et calculer $\mu_p = \mathbb{E}(U^p)$, les moments d'ordre p de U.
3. Soit $\{U_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U et on pose, pour tout $n \geq 1$,
$$T_n := \frac{U_1^3 + \cdots + U_n^3}{U_1^2 + \cdots + U_n^2}.$$
   Montrer que la suite de variables aléatoires $\{T_n\}_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une constante qu'on évaluera.
   Indication. On pourra étudier les limites des deux suites définies par $X_n := \frac{U_1^3+\cdots+U_n^3}{n}$ et $Y_n := \frac{U_1^2+\cdots+U_n^2}{n}$. Justifier soigneusement les passages à la limite.
4. Que vaut la limite en loi de la suite $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, où $Z_n := \sqrt{n}(X_n + \frac{1}{4})$?
   Indication. On pourra utiliser un résultat remarquable de convergence en loi.

Tourner S.V.P.

Exercice 3 *Minimum de variables géométriques*
Soit $\{T_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $0 < p < 1$, i.e. $\mathbb{P}(T_1 = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(T_1 > k) = (1-p)^k$.
2. On note $W_n := \min(T_1, \dots, T_n)$. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(W_n > k)$. En déduire que W_n est de loi géométrique d'un paramètre que l'on précisera.
3. En déduire que la suite $\{W_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1 lorsque n tend vers l'infini.
4. Montrer que la suite $\{W_n\}_{n\geq 1}$ converge en fait presque sûrement et dans L^1 vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 *Symétrie d'une variable binomiale*
Soit X une variable aléatoire binomiale telle que $\mathbb{E}(X) = 2\mathrm{Var}(X)$ et $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}\big(X < \mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{P}\big(X > \mathbb{E}(X)\big) = \frac{1}{2}$.