**Troisième contrôle continu - 16 décembre 2024**

Le sujet comporte **deux** pages. L'épreuve dure une heure trente. Les documents et téléphones portables sont interdits. Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.

**Exercice 1.** *Question de cours ou presque : convergences*
Déterminer la limite des suites $(I_n)_{n\geq 1}, (J_n)_{n\geq 1}$ et $(K_n)_{n\geq 1}$ données par

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\cos x}{n+\cos x}dx, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{ne^{-\frac{x}{n}}}{(n+1)\sqrt{x}}dx, \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{(n+1)e^{-\frac{x^2}{n}}}{n\sqrt{x}}dx$$

en utilisant une et une seule fois le théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée.

**Exercice 2.** *Intégrer ou sommer*
Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

**Exercice 3.** *Au-delà de la continuité*

**1)** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $h : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Pour $A \in \mathcal{A}$ on rappelle la notation $\displaystyle\int_A h\, d\mu = \int_E h\, \mathbb{1}_A\, d\mu$.

**a)** Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |h|\, \mathbb{1}_{\{|h|>n\}}\, d\mu = 0.$$

**b)** Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_A |h| d\mu < \varepsilon.$$

**c)** Dans cette question on suppose que l'espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Démontrer que la fonction

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \int_{]0,t[} h\, d\lambda$$

est uniformément continue.

**2)** Dans cette question on suppose que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Soient $p \in [1, +\infty[$ un réel, $q$ son exposant conjugué, $h$ une fonction de $L^p(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$ et de nouveau $H : t \mapsto \displaystyle\int_{]0,t[} h\, d\lambda$.

**a)** Démontrer que $H$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Lorsque $p > 1$ on pourra utiliser l'inégalité de Hölder.

**Tourner S.V.P.**

**b)** Démontrer que

$$\lim_{u\to 0+} \sup_{t\in\mathbb{R}_+^*} \frac{|H(t+u)-H(t)|}{u^{1/q}} = 0.$$

Lorsque $p>1$ on pourra démontrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+^*} \frac{|H(t+u)-H(t)|}{u^{1/q}} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}_+^*} |G(t+u)-G(t)|^{1/p} \qquad \text{où} \qquad G(t) := \int_{]0,t[} |h|^p \, d\lambda.$$

et utiliser le résultat de la question **1c)**. On analysera le cas $p=1$ séparément.

Le résultat est-il vrai lorsque $p=+\infty$ ?

**c)** Soit $g$ une fonction de $L^1(\mathbb{R}_+^*,\lambda)$, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $g' \in L^p(\mathbb{R}_+^*,\lambda)$. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

On pourra raisonner par contraposée et utiliser la question **2b)** appliquée à la fonction $g'$.

Le résultat est-il vrai lorsque $p=+\infty$ ?