

## CONTRÔLE CONTINU # 2

le 21 mars 2025, durée : 1h00, documents interdits.

**Exercice 1.** (*Question de cours*)

Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et  $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , puis donner au moins deux caractérisations équivalentes.

**Exercice 2.** (*Identification de loi*)

Soit  $(U, V)$  un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{2v} e^{-\sqrt{u}(\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{v}})} \mathbf{1}_{u \geq 0, v \geq 0},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y) = (\sqrt{UV}, \sqrt{U/V})$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
2. En passant par les fonctions caractéristiques, déterminer la loi de  $Z = X - Y$ .

**Exercice 3.** (*Vers un résultat de densité*)

On considère  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , i.e.  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$  et  $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ . On pose  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ .

1. Expliciter la loi de  $S_n$  en justifiant votre réponse.
2. Calculer l'espérance et la variance de  $\frac{S_n}{n}$ . Vérifier que  $\text{Var}(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{1}{4n}$ .
3. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que  $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$  est un polynôme de degré au plus  $n$  en la variable  $p$ , noté  $B_n(p)$  dans la suite.
4. On désigne par  $\|f\|_\infty$  la norme uniforme de  $f$  sur  $[0, 1]$  et par  $\omega_f(\delta)$  son module de continuité

$$\omega_f(\delta) := \sup_{\substack{0 \leq u, v \leq 1 \\ |u-v| \leq \delta}} \{|f(u) - f(v)|\}, \quad \delta > 0.$$

Montrer que, pour tout  $p \in [0, 1]$  et tout  $\delta > 0$ ,

$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta) \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \delta\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \delta\right).$$

5. En déduire que, pour tout  $p \in [0, 1]$ , on a

$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Que vaut  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n\|_\infty$ ? Quel résultat remarquable vous évoque cette limite?