Contrôle continu # 2

le 18 novembre 2024 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé.

Exercice 1 *Question de cours ou presque*

a) Soient μ une mesure finie sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui converge simplement vers 0. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)d\mu(x) = 0$.

b) Sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant $\mu-$presque partout vers une fonction f lorsque n tend vers l'infini. On suppose que (f_n) est bornée dans $\mathcal{L}^1$, autrement dit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n| d\mu(x) < \infty$. Montrer que f est intégrable.

c) Sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, soit f une fonction intégrable. Montrer que pour tout $R > 0$, on a $\mu(|f| \geq R) \leq \dfrac{1}{R} \int_E |f| d\mu$. En déduire que $\mu(|f| = +\infty) = 0$.

Exercice 2 *Fonction indicatrice*

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu = 0$ et on veut montrer qu'il existe alors $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$, $\mu-$presque partout.

a) Vérifier que $\{|f| > 2\} \subset \{|f - \mathbb{1}_{A_n}| > 1\}$ et déduire que $|f| \leq 2$, $\mu-$presque partout. On pourra utiliser l'inégalité de l'exercice 1c).

b) Montrer que l'on a la majoration

$$\int_E |f - f^2| d\mu \leq \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu + \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| \cdot |f + \mathbb{1}_{A_n}| d\mu \leq 4 \int_E |f - \mathbb{1}_{A_n}| d\mu.$$

c) En déduire que $f = f^2$ $\mu-$presque partout et ensuite que $f = \mathbb{1}_A$ avec A qu'on explicitera.

Exercice 3 *Convergence d'une suite*

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On considère alors la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$a_n := n \int_E \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu, \quad n \geq 1.$$

a) On suppose que f est intégrable. Montrer que (a_n) converge et expliciter sa limite. .

b) Que dire de la suite (a_n) lorsque $\int_E f d\mu = \infty$. On pourra penser au lemme de Fatou.