Université de Rennes | L3 Mathématiques
Intégration de Lebesgue | année 2024-2025

# Contrôle continu # 1

le 4 octobre 2024 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé

**Exercice 1** *Question de cours*
Donner la définition d'une classe monotone $\mathcal{M}$ sur $E$, un ensemble. Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de $E$ telle que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone contenant $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{M}$ contient $\sigma(C)$, la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

**Exercice 2** *Questions de mesures*
Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Déterminer la mesure de Lebesgue de l'ensemble
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ n, n + \frac{1}{2^n} \right[ .$$
2. Montrer qu'il n'existe pas de mesure $\mu$ finie non-nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation, c'est-à-dire $\mu(a + A) = \mu(A)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $A \subset \mathbb{Z}$.

**Exercice 3** *Barycentre de mesures*
Soit $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de mesures finies sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et soient $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de nombres réels positifs tels que $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = 1$. On veut montrer que
$$\mu := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \, \mu_k$$
est également une mesure finie sur $(E, \mathcal{A})$.

a) Montrer que si $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une famille d'évènements disjoints, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que pour tout $1 \leq k \leq n$ :
$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_k(A_j) - \varepsilon \leq \sum_{0 \leq j \leq N} \mu_k(A_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_k(A_j).$$

b) En déduire que $\mu$ est bien une mesure finie.