MASTER MATHÉMATIQUES 1ÈRE ANNÉE
SÉRIES TEMPORELLES : 2006-2007
DM 3 : 7 mai - 21 mai 2007

DM3-1. Soit $\{X_t\}$ un processus AR(1) dirigé par un bruit blanc $\{Z_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$ et de paramètre $|\phi| < 1$. Utiliser la formule de Bartlett pour calculer la covariance asymptotique de $\hat{\rho}(1)$ et $\hat{\rho}(2)$. Quel est le comportement de la corrélation asymptotique de $\hat{\rho}(1)$ et de $\hat{\rho}(2)$ quand $\phi \to \pm 1$?

DM3-2. Soit $\{X_t\}$ le processus ARMA(1,1)

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},\, t \in \mathbb{Z}, \quad |\phi| < 1, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

On observe $x_1, \ldots, x_{10}$ et on veut trouver les prévisions $\widehat{x}_{n+1}$, pour $n = 1, \ldots, 10$.

1. Décrire l'approche pour de la méthode de prévision et obtenir les relations de récurrence pour les erreurs quadratiques r_n et les coefficients de l'algorithme des innovations θ_{n1}.
2. On suppose que $\sigma^2 = 1$, $\phi = .2$ et $\theta = .4$. On a observé :

n	x_{n+1}	r_n	θ_{n1}	$\widehat{x}_{n+1}$
0	-1.100			
1	.514			
2	.116			
3	-.845			
4	.872			
5	-.467			
6	-.977			
7	-1.699			
8	-1.228			
9	-1.093			

   Effectuer les calculs pour trouver $\widehat{x}_{n+1}$, pour $n = 1, \ldots, 10$ ainsi que les valeurs de r_n, pour $n = 0, \ldots, 10$ et θ_{n1}, pour $n = 1, \ldots, 10$ (autrement dit, completer le tableau). Que peut-on remarquer ?
3. On revient au cas général et on suppose que le processus est inversible et que la suite $\{r_n\}$ admet une limite ℓ. Quelles sont les valeurs possibles de θ ? Montrer, en utilisant la relation de récurrence pour r_n donnée au premier point, que ℓ vaut nécéssairement 1. Que vaut alors la limite de la suite $\{\theta_{n1}\}$?
4. On suppose encore une fois que le processus est inversible. Pourquoi la suite $\{r_n\}$ admet-elle une limite ? Fournir une réponse et éventuellement une preuve. Quel résultat général peut-on énoncer ?