Master Mathématiques 1ère année
Séries Temporelles : 2006-2007
DM 2 : 13 mars - 27 mars 2007

DM2-1. Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ une s.t. stationnaire centrée ayant la fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ telle que $\gamma(h)=0$ pour $|h|>q$ et $\gamma(q)\neq 0$. On veut montrer que $\{X_t\}$ est un processus MA(q), c'est-à-dire qu'il existe un bruit blanc $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_t = Z_t+\theta_1 Z_{t-1}+\ldots+\theta_q Z_{t-q}$, $t\in\mathbb{Z}$.

1. Pour chaque t on note $\mathcal{M}_t=\overline{\text{Vect}}\{X_s : -\infty < s \leqslant t\}$ le sous-espace fermé de L^2 et on pose $Z_t := X_t - P_{\mathcal{M}_{t-1}}X_t$. Montrer que $Z_t\in\mathcal{M}_t$ et calculer $\mathrm{E}(Z_sZ_t)$ pour $s<t$.
2. Vérifier les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\|X_t-\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{t-s}\|^2 &= \|X_t\|^2+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s^2\|X_{t-s}\|^2-2\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\gamma(s)+2\sum_{1\leqslant s<r\leqslant n}\alpha_s\alpha_r\gamma(s-r)\\ &= \|X_{t+1}\|^2+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s^2\|X_{t+1-s}\|^2-2\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\gamma(s)+2\sum_{1\leqslant s<r\leqslant n}\alpha_s\alpha_r\gamma(s-r)\\ &= \|X_{t+1}-\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{t+1-s}\|^2.\end{aligned}$$

3. On sait, d'après l'exercice 2.5.2, que $\lim_{n\to\infty} P_{\overline{\text{Vect}}\{X_s:s=t-n,\ldots,t-1\}}X_t = P_{\mathcal{M}_{t-1}}X_t$ dans L^2. En déduire que

$$\begin{aligned}\|Z_{t+1}\| &= \lim_{n\to\infty}\|X_{t+1}-P_{\overline{\text{Vect}}\{X_s:s=t+1-n,\ldots,t\}}X_{t+1}\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\|X_t-P_{\overline{\text{Vect}}\{X_s:s=t-n,\ldots,t-1\}}X_t\| = \|Z_t\|.\end{aligned}$$

4. Déduire que $\{Z_t\}$ est stationnaire et si on note $\sigma^2=\|Z_t\|^2$, alors $\{Z_t\}\sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$.
5. Utiliser la définition de Z_t pour vérifier que $\mathcal{M}_t=\overline{\text{Vect}}\{X_s : s<t-1, Z_{t-1}\}=\overline{\text{Vect}}\{X_s : s<t-q, Z_{t-q},\ldots,Z_{t-1}\}$. En déduire que $\mathcal{M}_{t-1}=\mathcal{M}_{t-q-1}\oplus^{\perp}\overline{\text{Vect}}\{Z_{t-q},\ldots,Z_{t-1}\}$.
6. Montrer que l'hypothèse $\gamma(h)=0$ pour $|h|>q$ implique $P_{\mathcal{M}_{t-q-1}}X_t=0$. En déduire

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{M}_{t-1}}X_t &= P_{\mathcal{M}_{t-q-1}}X_t+P_{\overline{\text{Vect}}\{Z_{t-q},\ldots,Z_{t-1}\}}\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}(X_tZ_{t-1})Z_{t-1}+\ldots+\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}(X_tZ_{t-q})Z_{t-q}.\end{aligned}$$

   Conclure.

DM2-2. Soient $\{X_t : t\in\mathbb{Z}\}$ et $\{Y_t : t\in\mathbb{Z}\}$ deux s.t. stationnaires centrées ayant la même fonction d'autocovariance et supposons que $\{Y_t\}$ est un processus ARMA(p,q). On veut montrer que $\{X_t\}$ est aussi un processus ARMA(p,q). On va noter $\phi_1,\ldots,\phi_p$ les coefficients AR de $\{Y_t\}$ et on pose

$$W_t = X_t-\phi_1X_{t-1}-\ldots-\phi_pX_{t-p},\ t\in\mathbb{Z}.$$

Montrer que pour le processus $\{W_t\}$ on a $\gamma_w(h)=0$, pour $|h|>q$. En déduire par le résultat de l'exercice précédent que $\{W_t\}$ est un processus MA(q). Conclure.