Master Mathématiques 1ère année
Séries Temporelles : 2006-2007
DM 1 : 13 février - 26 février

DM1-1.

1. Montrer qu'un filtre linéaire $\{a_j\}$ laisse passer un polynôme de degré k sans le transformer, c'est-à-dire, que $m_t = \sum_j a_j m_{t+j}$, $t \in \mathbb{Z}$, pour tout polynôme de degré k, $m_t = c_0 + c_1 t + \ldots + c_k t^k$ si et seulement si
$$\sum_j a_j = 1 \text{ et } \sum_j j^r a_j = 0, \text{ pour } r = 1, \ldots, k.$$
2. Montrer que le filtre 15-points de Spencer (voir le cours) laisse passer sans distorsion une tendance cubique.

DM1-2. Soit $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ une série temporelle stationnaire de moyenne m et de fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$. On note $\overline{X} = (X_1+\ldots+X_n)/n$ la moyenne empirique associée à $X_1, \ldots, X_n$.

1. Vérifier l'égalité suivante
$$n\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{h=-(n-1)}^{-1}(n+h)\gamma(h) + \sum_{h=0}^{n-1}(n-h)\gamma(h)\right\}.$$
2. En déduire
$$n\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\gamma(h) \leqslant \sum_{|h|<n}\gamma(h).$$
3. Montrer que si $\lim_{n\to\infty}\gamma(n) = 0$, alors
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{|h|<n}\gamma(h) = 0.$$
En déduire que $\overline{X}$ converge, lorsque $n \to \infty$, vers m dans L^2 et en probabilité.
4. On suppose que $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)| < \infty$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h) < \infty.$$
Justifier votre réponse.