DESS IMOI - AD 2004-2005

Séries temporelles

DM5

DM5-1. Utiliser la densité spectrale pour décider si la fonction suivante est ou non une fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire $\{X_t\}$:

$$\gamma(h) := \begin{cases} 2 & \text{si } h = 0 \\ -1 & \text{si } |h| = 2 \text{ et si } |h| = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

DM5-2. Soit la série temporelle stationnaire

$$X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),\ \omega \in]0, \pi[,$$

où A et B sont deux variables aléatoires non-corrélées centrées de variance σ^2. Calculer la fonction d'autocovariance. Montrer que

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda)$$

où la fonction de répartition spectrale est

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < -\omega \\ \sigma^2/2 & \text{si } -\omega \leqslant \lambda < \omega \\ \sigma^2 & \text{si } \lambda > \omega \end{cases} .$$

L'intégrale est définie comme pour une fonction de répartition classique (par exemple $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)dG(\lambda) = \mathrm{E}(g(Z))$, avec Z de fonction de répartition G).

DM5-3. Soit la processus AR(2) $X_t - 1,5X_{t-1} + 0,5X_{t-2} = W_t$ où $\{W_t\}$ est un bruit blanc de variance 0,04. Est-il causal ? Calculer la densité spectrale. Trouver le point de maximum λ_0 de cette fonction. Représenter cette fonction sur $[0, \pi]$. À quelle période correspond la fréquence maximale λ_0 (la période vaut $2\pi/\lambda_0$) ? Que vaut la fonction d'autocovariance du modèle et la représenter graphiquement.