DESS IMOI - AD 2004-2005

Séries temporelles

DM4

DM4-1. Soit $\mathbf{X} = (X_n, \ldots, X_n)^\star$ un vecteur aléatoire et soit Y une variable aléatoire réelle, les deux de carrés intégarbles. On notera $\Gamma = \mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ ma matrice de covariance de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{g} = (\mathrm{Cov}(Y,X_n), \ldots, \mathrm{Cov}(Y,X_1))^\star$. On note $\mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X})$ la meilleur prévision linéaire de Y en termes de $1, X_n, \ldots, X_1$. L'opérateur de prévision $\mathrm{EL}(\cdot \mid \mathbf{X})$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X}) = \mathrm{E}(Y) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{X} - \mathrm{E}(\mathbf{X})\rangle$, où $\Gamma\mathbf{a} = \mathbf{g}$;
2. $\mathrm{E}\left[(Y - \mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X}))\mathbf{X}\right] = \mathbf{0}$ et $\mathrm{E}\left[Y - \mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X})\right] = 0$;
3. $\mathrm{E}\left[(Y - \mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X}))^2\right] = \mathrm{Var}(Y) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{g}\rangle$;
4. $\mathrm{EL}(aY + bZ + c \mid \mathbf{X}) = a\mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X}) + b\mathrm{EL}(Z \mid \mathbf{X}) + c$;
5. $\mathrm{EL}(\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n + c \mid \mathbf{X}) = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n + c$;
6. $\mathrm{EL}(Y \mid \mathbf{X}) = \mathrm{E}(Y)$ si $\mathbf{g} = 0$.

Vérifier les propriétés 4-6 (car 1-3 sont demontrées en cours).

DM4-2. Soit $\{X_t\}$ un processus $AR(p)$ causal (cela implique en particulier que W_t est non-corrélé avec tous les X_s, $s < t$). Montrer que la meilleure prévision linéaire à un pas $P_n X_{n+1}$ de X_{n+1} en termes de $1, X_1, \ldots, X_n$, avec $n > p$, est

$$P_n X_{n+1} = \phi_1 X_n + \ldots + \phi_p X_{n+1-p}.$$

On pourra appliquer l'opérateur de prevision P_n à l'équation de définition de $\{X_t\}$ et utiliser les propriétés 4-6 de l'exercice précédent.

Quelle est l'erreur quadratique de prévision?

Que vaut la fonction d'autocorrélation partielle?

DM4-3. Soient x_1, x_2, x_4, x_5 les observations d'un processus $MA(1)$ $\{X_t\}$. Trouver les meilleurs estimations linéaires de la valeur manquante x_3 en utilisant :

1. seulement x_1 et x_2;
2. seulement x_4 et x_5.

Calculer dans les deux cas les erreurs quadratiques.