DESS IMOI - AD 2004-2005

Séries temporelles

DM1

DM1-1. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathrm{E}(X_i^2) < \infty$ et $\mathrm{E}(X_i) = m$. On note $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$. Montrer que :

1. $\min_a \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.
2. le meilleur estimateur [1] combinaison linéaire de $X_1, \ldots, X_n$, sans biais de m est $\overline{X}$.

DM1-2. Soit $\{Z_t\} \sim IID(0,\sigma^2)$ de loi gaussienne et soient a,b,c constantes. Lequels des processus suivants sont stationnaires? Pour chaque processus stationnaire calculer les fonctions de moyenne et d'autocovariance.

1. $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-2}$;
2. $Z_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$;
3. $X_t = Z_0 \cos(ct)$;
4. $X_t = Z_t Z_{t-1}$.

DM1-3. Soit $\{X_t\}$ le processus MA(2) donné par $X_t = W_t + \theta W_{t-2}$, où $\{W_t\} \sim WN(0,1)$.

1. Trouver les fonction d'autocovariance $\gamma_x(\cdot)$ et d'autocorrélation $\rho_x(\cdot)$, lorsque $\theta = 0{,}8$.
2. Calculer la variance de la moyenne empirique $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ lorsque $\theta = 0{,}8$.
3. Refaire le calcul du point précédent lorsque $\theta = -0{,}8$ et comparer les deux réponses.

1. ayant la plus petite variance