Probabilités de base : devoir maison no. 2
- une copie double maximum, à rendre pour le **22 mars 2011** -

Exercice I.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = 0$ si et seulement si $\mathrm{P}(X = c) = 1$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire. Montrer que $\det \mathrm{Cov}(X) = 0$ si et seulement s'il existe $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ non nul et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P}(a_1X_1 + \ldots + a_dX_d = b) = 1$.

Exercice II.

Supposons que $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, telles que $\mathrm{E}[(\varepsilon_j - \mathrm{E}\varepsilon_j)^3] = 0$.

Montrer que les variables aléatoires $S = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \varepsilon_j$ et $V = \sum_{j=1}^n (\varepsilon_j - S)^2$ sont non-corrélées.

Exercice III.

Soit $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Supposons qu'il existe un événement A tel que $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(A_n \cap A) < \infty$.

1. Montrer que $\mathrm{P}(\limsup_n A_n) \leqslant 1 - \mathrm{P}(A)$.
2. Maintenant, on suppose de plus que $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(A_n) = \infty$ et que les événements $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ sont indépendants. Trouver toutes les valeurs possibles de $\mathrm{P}(A)$.

Exercice IV.

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur gaussien de dimension d, centré et de matrice de covariance K. Soient A une matrice $k \times d$ et B une matrice $r \times d$. On définit $\mathbf{Y} := A\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z} := B\mathbf{X}$. Montrer que $(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ est un vecteur gaussien et exprimer sa fonction caractéristique $\varphi_{(\mathbf{Y},\mathbf{Z})}$. Montrer que les vecteurs $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$ sont indépendants si et seulement si $AKB^\star = 0$.

Exercice V.

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $u \in [0, 1]$ on introduit la fonction dite génératrice $G_X(u) := \mathrm{E}(u^X)$.
   (a) Dire pourquoi cette fonction est bien définie, et pourquoi elle caractérise la loi de X. Montrer que $G_X(1) = 1$, et que si X est intégrable alors $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.
   (b) Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi que X. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Montrer que $G_{S_n}(u) = [G_X(u)]^n$.
2. On reprend la même suite $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ du point 1(b) et soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $\{X_n\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on introduit $T(\omega) = \sum_{j=1}^{Z(\omega)} X_j(\omega)$.
   (a) Montrer que T est une variable aléatoire.
   (b) Justifier que $\mathrm{P}(T = k) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(T = k, Z = n) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n = k)\mathrm{P}(Z = n)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que, pour $u \in [0, 1]$, $G_T(u) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(Z)G_X(u)^n = G_Z(G_X(u))$.
   (d) Montrer que si X et Z sont intégrables, alors $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(X)$.