Probabilités de base : devoir maison no. 2

- une copie double maximum, à rendre pour le **1er avril 2009** -

Exercice I.

On effectue une suite d'expériences indépendantes, chacune à deux issues (succès et échec). La probabilité d'obtenir le succès pour la k-ième expérience est p_k. Notons Z_n le nombre de succès obtenus lorsque l'on effectue n expériences. Calculer $\mathrm{E}(Z_n)$, $\mathrm{Var}(Z_n)$, $\mathrm{E}[(Z_n - \sum_{k=1}^n p_k)^3]$ et $\mathrm{E}[(Z_n - \sum_{k=1}^n p_k)^4]$.
Question subsidiaire (plus dure) : montrer que pour une valeur donnée de $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k$, $0 < a < 1$, le maximum de $\mathrm{Var}(Z_n)$ est atteint pour $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = a$.

Exercice II.

Trouver la fonction de répartition et la fonction caractéristique des variables :

a) $\frac{S}{S+T}$, lorsque S et T sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même paramètre $\lambda > 0$;

b) $G_1 \cos\Theta + G_2 \sin\Theta$, lorsque G_1, G_2 et Θ sont trois variables aléatoires indépendantes telles que $G_1, G_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$.

Exercice III.

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien d'espérance $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\star$ et de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(X, Y, Z) a-t-il une densité ? Même question pour (X, Y) ? Si oui, les calculer. Peut-on exprimer Z comme une combinaison linéaire de X et Y ? Si oui, l'écrire.

Exercice IV.

Une loi de probabilité μ est dite infiniment divisible si pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut écrire μ comme le n-ième produit de convolution $\nu_n^{\star n}$ d'une autre loi de probabilité ν_n.

a) Ecrire la condition de loi infiniment divisible en termes de variables aléatoires et ensuite en termes de fonctions caractéristiques.

b) Les lois suivantes sont-elles infiniment divisibles : $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, δ_a ($a \in \mathbb{R}$), la loi de Cauchy ?

Exercice V.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + U_k) = \int_0^1 f(y)dy \quad \text{p.s. .}$$