Probabilités de base : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **8 février 2012** -

Exercice I.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité et A, B deux événements. Exprimer l'événement "exactement un seul des événements A et B se réalise" et montrer que sa probabilité vaut $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(A \cap B)$.

Exercice II.

Un couple de variables aléatoires (X, Y) admet la fonction de répartition jointe

$$F_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0, \\ \left(1 - e^{-2s}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(t)\right) & \text{si } s \geqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que (X, Y), X et Y sont à densité et calculer ces densités. Que valent les fonctions de répartition de X et de Y ? Étudier l'intégrabilité de X et de Y.

Exercice III.

Trouver la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$ lorsque la densité de (X, Y) est donnée par $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{x,y \geqslant 0}$. Que valent les quantité $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$, si elles existent ?

Exercice IV.

Un réel m est appelé *médiane* d'une fonction de répartition F lorsqu'il satisfait les inégalités $\lim_{t \uparrow m} F(t) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(m)$. Montrer que chaque fonction de répartition admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de F est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On pourra étudier les quantités $\sup\{t : F(t) < \frac{1}{2}\}$ et $\sup\{t : F(t) \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Exercice V.

Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \ldots, n$. On extrait k boules au hasard (sans remise) et on fait la somme des nombres obtenus. Calculer l'espérance et la variance de cette somme.