Probabilités de base : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **15 février 2011** -

Exercice I.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité et soient $A, B \in \mathcal{A}$. Montrer

$$\mathrm{P}(A \cap B)^2 + \mathrm{P}(A^c \cap B)^2 + \mathrm{P}(A \cap B^c)^2 + \mathrm{P}(A^c \cap B^c)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Montrer que cette inégalité devient une égalité si et seulement si

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Exercice II.

Lors d'une expérience aléatoire on obtient le “succès” avec une probabilité $p \in]0,1[$. On effectue cette expérience de façon répétée, en assurant les mêmes conditions initiales avant chaque réalisation. On note le résultat à chaque réalisation et on arrête les expériences après avoir noté l'obtention de n “succès”, $n \geqslant 1$. Soit T la variable aléatoire égale au nombre total de réalisations de l'expérience.

1. Trouver l'ensemble de valeurs possibles de T et calculer $\mathrm{P}(T = n)$ et $\mathrm{P}(T = n+1)$.
2. Donner une explication soigneuse et succincte de la formule suivante :

   $$\mathrm{P}(T = k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n} =: \pi_k$$

   pour k appartenant à l'ensemble trouvé au premier point. Quelle loi obtient-on si $n = 1$?
3. Calculer $\mathrm{E}(T)$, $\mathrm{E}\left[T(T+1)\right]$ et en déduire $\mathrm{Var}(T)$. Calculer $\mathrm{E}\left[(n-1)/(T-1)\right]$, pour $n \geqslant 2$. On pourra remarquer que $\sum_k \pi_k = 1$.
4. Trouver le nombre moyen de lancers d'un dé jusqu'à la cinquième apparition de la face 6.

Exercice III.

1. Le couple aléatoire (N, M) de variables aléatoires discrètes satisfait

   $$\mathrm{P}(N = n, M = m) = \frac{c}{(n+m-1)(n+m)(n+m+1)}, \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots$$

   Calculer c. Trouver les lois de N, M et $N + M$. Que vaut la covariance $\mathrm{Cov}(N, M)$?
2. Un couple aléatoire (S, T) admet pour densité de probabilité la fonction

   $$f(s,t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b+c)}{(\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} s^{a-1} t^{b-1} (1-s-t)^{c-1}, & \text{si } s > 0, t > 0, s + t < 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   $(a, b, c > 0)$. Trouver les densités de probabilité des variables aléatoires S, T et $S + T$. Que valent $\mathrm{E}(S)$ et $\mathrm{E}(S + T)$?

Exercice IV.

Montrer que la fonction caractéristique φ d'une variable aléatoire réelle X satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|1 - \varphi(t)| \leqslant \mathrm{E}(|tX|)$.