Probabilités de base : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **16 février 2010** -

Exercice I.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. Montrer que si $X = Y$ p.s. alors $X \sim Y$ (elles ont la même loi).
2. On suppose que X admet une densité $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ et que f est une fonction paire. Soit $Y = -X$. Montrer que $X \sim Y$. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$. Que peut-on conclure ?
3. Si on suppose que $X \sim Y$, a-t-on $XZ \sim YZ$ pour toute variable aléatoire réelle Z ?
4. On introduit la quantité $r(X, Y) := \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |\mathrm{P}(X \leqslant t) - \mathrm{P}(Y \leqslant t)|$.

   Montrer que r est une distance sur l'ensemble des probabilités définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, mais qu'il ne s'agit pas d'une distance sur $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathrm{P})$.

Exercice II.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ définie par $f(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} |x| \exp(-|x| - \dfrac{1}{2} x^2 y^2)$.

1. Montrer que f est la densité de probabilité d'un couple aléatoire (X, Y). Trouver les densités marginale de X et Y. Ces marginales sont-elles des fonctions continues ?
2. Soit $\{r_1, r_2, \ldots\}$ une énumération de l'ensemble des nombres rationnels. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} 2^{-n} f(x - r_n, y)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle définit une fonction qui est la densité de probabilité d'un couple aléatoire (U, V).
3. Trouver les densités marginales de U et V et étudier leurs propriétés de continuité.

Exercice III.

On considère l'espace de probabilité $([0, 1), \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.

1. Montrer que les variables aléatoires $U(\omega) = \omega$, $V(\omega) = 1 - \omega$ et $W(\omega) = |2\omega - 1|$ $(\omega \in [0, 1])$ sont de même loi. Laquelle ?
2. On introduit six variables aléatoires : $X = Y = \tan \frac{\pi U}{2}$, $Z = -2X$ et $X' = \tan \frac{\pi U}{2}$, $Y' = \tan \frac{\pi V}{2}$, $Z' = -2 \tan \frac{\pi W}{2}$. Montrer que $X \sim X'$, $Y \sim Y'$, $Z \sim Z'$.
3. Calculer $X + Y + Z$ et déduire la valeur de $\mathrm{E}(X + Y + Z)$.
4. Montrer que $X' + Y' + Z' = 2X' \mathbb{1}_{0 < U < \frac{1}{2}} + 2Y' \mathbb{1}_{\frac{1}{2} < U < 1}$. Que valent $\mathrm{P}(X' + Y' + Z' > 0)$ et $\mathrm{E}(X' + Y' + Z')$?

Exercice IV.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$. On suppose que X admet des moments de tout ordre.

1. Montrer que si f est paire alors tous les moments d'ordre impair sont nuls.
2. Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{48} \exp(-|x|^{1/4})(1 + \sin |x|^{1/4}), & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{48} \exp(-|x|^{1/4})(1 - \sin |x|^{1/4}), & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

   Vérifier que f est une densité de probabilité qui n'est pas une fonction paire, mais que tous les moments impairs de X sont nuls. BONUS : Montrer que $\mathrm{E}(X^{2n}) = \frac{1}{6}(8n + 3)!$