Probabilités de base : devoir maison no. 1

- une copie double maximum, à rendre pour le **25 février 2009** -

Exercice I.

Soit Z une variable aléatoire réelle de fonction de répartition continue F. Quelle est la loi de $F(Z)$? Montrer que si Z est intégrable alors $E(Z) = \displaystyle\int_0^\infty (1 - F(t) - F(-t))dt$.

Exercice II.

Le vecteur aléatoire (U, V, W) est de densité $f(u, v, w) := \kappa uvw\mathbb{1}_{0<u,v,w<1}$. Calculer κ ainsi que $\mathrm{P}(U < V < W)$. Que valent $\mathrm{P}(V < U < W)$ et $\mathrm{P}(W < V < U)$?

Exercice III.

On note (X, Y) les coordonnées d'un point aléatoire dans le plan. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la densité du couple aléatoire (X, Y) soit $h(x, y) := g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Trouver la densité du couple aléatoire (R, Θ) désignant les coordonnées polaires du point (X, Y), ainsi que les marginales de R et de Θ. Exprimer le plus simplement possible les conditions satisfaites par la fonction g pour que h soit bien une densité de probabilité. Répondre aux mêmes questions pour le cas particulier $g(u) := \frac{1}{2\pi(1+u^2)^{3/2}}$.

Exercice IV.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle intégrable. Supposons qu'il existe une variable aléatoire réelle Z intégrable, $\mathcal{C}$-mesurable et telle que $\mathrm{E}(Z\mathbb{1}_C) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X)$, que si $X \geqslant 0$ p.s. alors $Z \geqslant 0$ p.s., et enfin, que si $\tilde{Z}$ est une autre variable aléatoire réelle intégrable, $\mathcal{C}$-mesurable et telle que $\mathrm{E}(\tilde{Z}\mathbb{1}_C) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, alors $\tilde{Z} = Z$ p.s.

Exercice V.

Une application Ψ, agissant sur les matrices de taille $d \times k$ ($d, k \geqslant 1$ entiers) et à valeur dans l'ensemble des matrices symétriques de taille $r \in \mathbb{N}^*$, est dite convexe si pour toute paire de matrices A, B de taille $d \times k$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $\Psi(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leqslant \lambda\Psi(A) + (1 - \lambda)\Psi(B)$, où pour deux matrices symétriques on écrit $C \leqslant D$ si $D - C$ est une matrice positive au sens où $u^\star(D - C)u \geqslant 0$, pour tout vecteur u. Soit X une matrice aléatoire de taille $d \times k$, c'est-à-dire une matrice ayant pour coefficients des variables aléatoires réelles. On dit qu'elle est intégrable si tous les éléments sont intégrables et on note $\mathrm{E}(X)$ la matrice des espérances. Montrer que si Ψ est une application convexe dans le sens défini précédemment, alors $\Psi(\mathrm{E}(X)) \leqslant \mathrm{E}(\Psi(X))$, lorsque $\Psi(X)$ est intégrable. Si on suppose de plus que X est symétrique et strictement positive, c'est-à-dire $u^\star Xu > 0$, pour tout vecteur $u \neq 0$, montrer que $\mathrm{E}(X^{-1}) \geqslant (\mathrm{E}(X))^{-1}$.