Grandes déviations et applications : devoir maison no. 3

- à rendre pour le **17 février 2012** -

Exercice I.

Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans un espace de Banach séparable E, de loi gaussienne centrée μ ayant la covariance $C_\mu : E^\star \times E^\star \to [0,\infty)$. On note $\Lambda^\star_\mu$ la transformée de Legendre de $\Lambda_\mu(\cdot) = \log \int_E e^{\langle \cdot, x\rangle}\mu(dx)$ et on pose

$$a := \inf\{\Lambda^\star_\mu(x) : \|x\| = 1\} \quad \text{ et } \quad b := \sup\{C_\mu(\varphi,\varphi) : \|\varphi\|_{E^\star} = 1\}.$$

1. Montrer que
$$\inf_{x\in B(0,1)^c} \Lambda^\star_\mu(x) = \inf_{x\in\left(\overline{B(0,1)}\right)^c} \Lambda^\star_\mu(x) = a.$$
On pourra justifier et utiliser l'égalité $\Lambda^\star_\mu(\alpha x) = \alpha^2 \Lambda^\star_\mu(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
2. Montrer que
$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log \mu(\{x \in E : \|x\| \geqslant R\}) = -a.$$
On pourra utiliser la majoration pour $B(0,1)^c$ et la minoration pour $\left(\overline{B(0,1)}\right)^c$ du principe de grandes déviations pour la famille $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, où μ_ε note la loi sous μ de l'application $x \mapsto \sqrt{\varepsilon}x$.
3. On note μ^φ la loi sous μ de l'application $E \ni x \mapsto \langle\varphi, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\varphi \in E^\star$. Montrer que
$$\Lambda^\star_\mu(x) = \sup\{\Lambda^\star_{\mu^\varphi}(\langle\varphi,x\rangle) : \|\varphi\|_{E^\star} = 1\} = \sup\left\{\frac{\langle\varphi,x\rangle^2}{2C_\mu(\varphi,\varphi)} : \|\varphi\|_{E^\star} = 1\right\}.$$
On pourra utiliser l'expression de la fonction de taux du théorème de Cramer pour une loi gaussienne centrée de variance σ^2. En déduire que pour $\|x\| = 1$, $\Lambda^\star_\mu(x) \geqslant \frac{1}{2b}$.
4. Soit $\varphi \in E^\star$ tel que $\|\varphi\|_{E^\star} = 1$. Montrer que
$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log \mu(\{x \in E : \|x\| \geqslant R\}) \geqslant \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \log \mu(\{x \in E : \langle\varphi,x\rangle \geqslant R\}) \\ = -[\Lambda^\star_{\mu^\varphi}(1) \wedge \Lambda^\star_{\mu^\varphi}(-1)].\end{aligned}$$
En déduire que $a \leqslant \frac{1}{2C_\mu(\varphi,\varphi)}$.
5. En déduire que $a = \frac{1}{2b}$, que $a \in (0,\infty]$ et que $\int_E e^{\beta\|x\|^2}\mu(dx) < \infty$ pour $\beta \in (0,a)$.