Grandes déviations et applications : devoir maison no. 2

- à rendre pour le **6 février 2012** -

Exercice I.

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ et on désigne par Λ et $\Lambda^\star$ respectivement, les transformées de log-Laplace et de Cramer associées à μ.

1. Soit $\alpha \in (0,1)$, on suppose que $\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(dx) < \infty$ et on note $m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$ Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant \frac{2}{1-\alpha}.$$
On pourra montrer que si $y \geqslant m$ et $\Lambda^\star(y) < \infty$, alors $\int_{[m,y]} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$ et que si $y \leqslant m$ et $\Lambda^\star(y) < \infty$, alors $\int_{[y,m]} e^{\alpha\Lambda^\star(x)}\mu(dx) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$.
2. Supposons cette fois que $\Lambda(\lambda) < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et notons encore une fois $m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$. Soit P_n la loi de l'application $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1+\dots+x_n)/n$ sous $\mu^{\otimes n}$. Montrer que, lorsque $z \geqslant m$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}_n\big((z,\infty)\big) = -\inf_{y>z} \Lambda^\star(y).$$
On pourra écrire que, pour tout $\delta > 0$, $[z+\delta,\infty) \subset (z,\infty) \subset [z,\infty)$.

Exercice II.

On désigne par $(E,\mathcal{B}(E))$ un espace de Banach séparable muni de sa tribu borélienne et soit $\{P^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ une famille d'éléments de $\mathcal{M}_1(E)$. On fait l'hypothèse que la famille $\{P^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec fonctionnelle de taux I.

1. Montrer que pour tout $x \in E$ on a :
$$\begin{aligned} I(x) &= \sup\{-\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^{(\varepsilon)}(A) \;:\; A \text{ ouvert convexe} \ni x\} \\ &= \sup\{-\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^{(\varepsilon)}(A) \;:\; A \text{ ouvert convexe} \ni x\}. \end{aligned}$$
2. On suppose de plus que $\sup\limits_{0<\varepsilon\leqslant 1} \left(\int e^{\frac{1}{\varepsilon}\langle\varphi,x\rangle} P^\varepsilon(dx)\right)^\varepsilon < \infty$, $\forall \varphi \in E^\star$ et que I est une bonne fonctionnelle de taux. Montrer qu'il existe
$$\Lambda(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_E e^{\langle\frac{\varphi}{\varepsilon},x\rangle} P^\varepsilon(dx) \in (-\infty,\infty], \quad \forall \varphi \in E^\star,$$
et qu'elle satisfait $\Lambda(\varphi) = \sup\limits_{x\in E}\{\langle\varphi,x\rangle - I(x)\}$, $\varphi \in E^\star$.