Grandes déviations et applications : devoir maison no. 1
- à rendre pour le **23 janvier 2012** -

Sur un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $(E, \mathcal{B}(E))$ on considère $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de probabilités satisfaisant un principe de grandes déviations avec une bonne fonctionnelle de taux $I : E \to [0, \infty]$.

1. Montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $I(x) = 0$.

2. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Pour $M > 0$ on introduit la quantité

$$\Delta_M := \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\{F>M\}} e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon.$$

et on suppose que F satisfait la condition $\lim_{M\to\infty} \Delta_M = -\infty$. On veut montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon = \sup_E (F - I). \tag{1}$$

i) Montrer que pour tout $y \in E$ et tout $r > 0$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{B(y,r)} e^{\frac{1}{\varepsilon}F} dP^\varepsilon \geqslant \inf_{B(y,r)} F - I(y)$$

En déduire la minoration pour lim inf de type (1).

ii) Pour $\ell > 0$, on note $K_\ell = \{x : I(x) \leqslant \ell\}$. Montrer pour tout $\delta > 0$, il existe un recouvrement fini, disons de taille k, de K_ℓ avec des boules $B(x_j, r_j)$ tel que

$$\sup_{\overline{B(x_j,r_j)}} F \leqslant F(x_j) + \delta \quad \text{et} \quad \inf_{\overline{B(x_j,r_j)}} I \geqslant I(x_j) - \delta, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Si on suppose que F est majorée par une constante $M > 0$, montrer que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int e^{\frac{1}{\varepsilon}F} dP^\varepsilon \leqslant \big(\max_{1\leqslant j\leqslant k} (F(x_j) - I(x_j) + 2\delta)\big) \vee (M - \ell).$$

Prouver que si F est majorée par M alors on peut obtenir la majoration pour lim sup de type (1).

iii) On suppose que F est continue non-majorée. Montre qu'on peut encore obtenir la majoration pour lim sup de type (1). On pourra utiliser l'inégalité obtenue au point ii) pour $F_M := F \wedge M$, $M > 0$ ainsi que la condition sur F.

b. Dans ce point on suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \left(\int e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \right)^\varepsilon < \infty. \tag{2}$$

Démontrer l'égalité (1).

c. On revient à l'hypothèse F continue satisfaisant $\lim_{M\to\infty} \Delta_M = -\infty$. Montrer que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_C e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \leqslant \sup_C (F - I), \qquad \text{pour } C \subset E \text{ fermé}$$

et

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_O e^{\frac{1}{\varepsilon}F}\, dP^\varepsilon \geqslant \sup_O (F - I), \qquad \text{pour } O \subset E \text{ ouvert.}$$

Que vaut $\lim\limits_{\ell\to\infty} \inf\{I(x) - f(x) : x \in E \text{ tel que } f(x) > \ell\}$?