Université de Rennes 1 — Année 2017-2018
Master 1 Mathématiques — Chaînes de Markov et martingales

# Devoir en temps libre

pour le 9 novembre 2017 - 8 pages maximum

### *Suite chronologique auto-régressive*

On considère un processus auto-régressif à coefficients aléatoires, c'est-à-dire une suite $(X_n)$ telle que $X_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \theta_{n+1} X_n + \varepsilon_{n+1}, \qquad \text{où}$$

— la suite $(\theta_n)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[\theta_n] =: \theta$ et $\mathbb{E}[\theta_n^2] =: \tau^2 > \theta^2$,
— la suite $(\varepsilon_n)$ est une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] = 1$,
— les suites $(\theta_n)$ et $(\varepsilon_n)$ sont indépendantes.

On note $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$ la filtration canonique associée au processus et on suppose que $\tau^2 > 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
$$\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}] = 0, \quad \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \theta X_n, \quad \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \tau^2 X_n^2 + 1.$$
2. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n := \dfrac{X_n^2}{\tau^{2n}}$. Montrer que $(Y_n)$ est une sousmartingale bornée dans $\mathrm{L}^1$.
3. En déduire que $(Y_n)$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $Y_\infty$, puis en utilisant le lemme de Cesàro que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 - 1} Y_\infty \quad \text{p.s.}$$

Dans toute la suite, nous supposerons que la variable limite $Y_\infty$ est strictement positive presque sûrement. On souhaite trouver un estimateur consistant du paramètre inconnu[1] $\theta$. On introduit :

$$C_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k X_{k-1}}{1 + X_{k-1}^2}, \quad D_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_{k-1}^2}{1 + X_{k-1}^2}, \quad M_n := C_n - \theta D_n.$$

On pose alors $\widetilde{\theta}_n := C_n / D_n$ de sorte que $\widetilde{\theta}_n - \theta = M_n / D_n$.

3. Montrer que la suite $(M_n)$ est une martingale et que $\langle M \rangle_n = O(n)$, lorsque $n \to \infty$.
4. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n} = 1 \quad \text{p.s. et en déduire que} \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{\theta}_n = \theta \quad \text{p.s.}$$

### *Formule de Girsanov discrète*

Soit $N > 0$ un entier fixé. Dans cet exercice les processus sont à horizon fini $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$. On notera $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ un accroissement du processus $X_n$.

1. Soit $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ un processus. On pose
$$\mathcal{E}_0(X) = 1, \qquad \text{et pour } n \geq 1 \;\; \mathcal{E}_n(X) := (1 + \Delta X_1) \ldots (1 + \Delta X_n).$$

Montrer que :

1. c'est-à-dire une suite de v.a. convergeant presque sûrement vers le paramètre

(a) pour deux processus $(X_n)$ et $(Y_n)$ on a $\mathcal{E}_n(X)\mathcal{E}_n(Y) = \mathcal{E}_n(X + Y + \langle X, Y\rangle)$, où on a posé $\langle X, Y\rangle_0 = 0$ et $\langle X, Y\rangle_n := \sum_{k=1}^n \Delta X_k \Delta Y_k$ ;

(b) on a $1/\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{E}_n(-X^*)$, où on a noté $X_0^* = 0$ et $\Delta X_n^* = \Delta X_n/(1 + \Delta X_n)$ ;

(c) $(\mathcal{E}_n(X))_{0\le n\le N}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)$-martingale ssi $(X_n)_{0\le n\le N}$ est une martingale.

2. Soit $Z > 0$ une variable aléatoire intégrable telle que $\mathbb{E}(Z) = 1$. On introduit

$$\mathbb{P}'(A) := \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

On peut vérifier que $\mathbb{P}'$ est une mesure de probabilité. L'espérance sous $\mathbb{P}'$ sera notée $\mathbb{E}'$.

(a) Montrer que pour toute variable aléatoire $X > 0$, $\mathbb{E}'(X) = \mathbb{E}(XZ)$.

(b) Si $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ alors on pose $Z_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$. Montrer que pour tout $n \le N$ et toute variable aléatoire $W \in \mathcal{F}_n$ positive $\mathbb{E}'(W) = \mathbb{E}(WZ) = \mathbb{E}(WZ_n)$.

(c) Montrer que pour toute variable aléatoire $X \in \mathcal{F}_n$ intégrable, on a, pour tout $1 \le n \le N$

$$\mathbb{E}'(X|\mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(XZ_n|\mathcal{F}_{n-1}).$$

(d) Soit $(M_n)_{0\le n\le N}$ une $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$-martingale sous $\mathbb{P}$. Montrer que le processus $(\widetilde{M}_n)_{0\le n\le N}$

$$\widetilde{M}_n := M_n - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1}\Big) \quad \textit{(formule de Girsanov)}$$

est une $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$-martingale sous $\mathbb{P}'$.

3. Soient deux processus $(B_n)_{0\le n\le N}$ et $(S_n)_{0\le n\le N}$ tels que

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1},\ \Delta S_n = \rho_n S_{n-1},$$

où $(r_n)$ est prévisible et $(\rho_n)$ est adapté par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n, B_0, \ldots, B_{n+1})$.

(a) Trouver deux processus $(U_n)$ et $(V_n)$ tels que

$$B_n = B_0\mathcal{E}_n(U) \quad \text{et} \quad S_n = S_0\mathcal{E}_n(V).$$

(b) Montrer que $(S_n/\mathcal{E}_n(U))_{0\le n\le N}$ est une martingale ssi $(V_n - U_n)_{0\le n\le N}$ est une martingale.

4. On reprend les mêmes notations qu'au point précédent et on suppose que les $r_n = r > 0$ sont constantes et que les v.a. $(\rho_n)$ sont i.i.d. de carré intégrable. On note $m = \mathbb{E}(\rho_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\rho_1) > 0$.

(a) On pose $V_n = \rho_1 + \ldots + \rho_n$ et $M_n = V_n - nm$. Montrer que $(M_n)_{0\le n\le N}$ est une martingale.

(b) Soit $G_n = \frac{r-m}{\sigma^2}M_n$. Montrer que $(G_n)_{0\le n\le N}$ et $(\mathcal{E}_n(G))_{0\le n\le N}$ sont des martingales.

(c) On pose $Z_N = \mathcal{E}_N(G)$ et $Z_n = \mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_n)$. Montrer que pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, $Z_n = \mathcal{E}_n(G)$ p.s.

(d) Soit $\mathbb{P}^\star$ définie par

$$\mathbb{P}^\star(A) = \mathbb{E}(Z_N\mathbb{1}_A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Montrer que si $(\rho_n(\omega) - m)(r - m) + \sigma^2 > 0$ pour tout $n \le N$ et tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathbb{P}^\star$ est une probabilité.

(e) Montrer à l'aide de la formule de Girsanov que $(V_n - U_n)_{0\le n\le N}$ est une $\mathbb{P}^\star$-martingale. En déduire que $(S_n/\mathcal{E}_n(U))_{0\le n\le N}$ est une $\mathbb{P}^\star$-martingale (il n'y a aucune raison a priori que ce processus soit une $\mathbb{P}$-martingale).