Devoir en temps libre

pour le 19 novembre 2018 - ne pas dépasser 8 pages de rédaction

Somme de produits de variables aléatoires

Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $0<p<1$. Pour tous les entiers $\ell \geq 1$ et $n \geq \ell$ on pose

$$X_n(\ell) = \xi_n \xi_{n-1} \dots \xi_{n-\ell+1}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \text{et} \quad T_n(\ell) = \sum_{k=\ell}^{n} X_k(\ell).$$

Par exemple, si $\ell = 1$, $X_n(1) = \xi_n$ et $T_n(1) = S_n$. Que vaut la limite presque sûre de $\frac{S_n}{n}$?

1. On introduit, pour $n \geq \ell$, la suite définie par $M_n = \displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \frac{X_k(\ell) - pX_{k-1}(\ell-1)}{k}$.

   Montrer que $(M_n)_{n\geq \ell}$ est une martingale bornée dans L^2 et calculer son compensateur $\langle M \rangle_n$.
2. Déduire que (M_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire de carré intégrable.
3. En déduire que pour tout $\ell \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n(\ell)}{n} = p^\ell$ p.s. (voir le lemme de Kronecker).

Martingales rétrogrades

On considère $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de soustribus, c'est-à-dire $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}_{n+1}$. On dit que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *(sous)martingale inversée ou rétrograde* si, pour tout n, $X_n \in \mathrm{L}^1$, $X_n \in \mathcal{F}_n$ et

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n+1}) \geq X_{n+1} \text{ resp. } = X_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On dit que l'ensemble d'indices a été inversé. Pour $n \in -\mathbb{N}$ on note $\mathcal{F}'_n = \mathcal{F}_{-n}$ et $X'_n = X_{-n}$. Alors $\mathcal{F}'_n \subset \mathcal{F}'_m$ si $n \leq m < 0$ et $(X'_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}'_n)$–(sous)martingale avec l'ensemble d'indices $-\mathbb{N}$ parcouru au sens du temps habituel de gauche à droite :

$$\mathbb{E}(X'_m|\mathcal{F}'_n) \geq X'_n \text{ resp. } = X'_n \quad n \leq m < 0 \text{ entiers.}$$

On va étudier la convergence de la martingale rétrograde (X_n) et voir des applications.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale rétrograde par rapport à la famille décroissante $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) = \sup_{n\in-\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X'_n|) < \infty$.
   (b) Soit $N \geq 1$ un entier et on pose pour tout

   $$\text{pour tout } \ n \in \{1,\dots,N\},\ Y_n^N := X'_{-N+n} \ \text{ et } \ \mathcal{G}_n^N := \mathcal{F}'_{-N+n},$$

   et

   $$\text{pour tout } \ n > N,\ Y_n^N := X'_0 = X_0 \ \text{ et } \ \mathcal{G}_n^N := \mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_0.$$

   Montrer que $(Y_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{G}_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$–martingale On rappelle $U_k([a,b],x)$ le nombre de traversées montantes d'un intervalle $[a,b]$ par une suite (x_n) avant l'instant k. Montrer que pour tous $a<b$

   $$(b-a)\mathbb{E}\Big[U_N([a,b],Y^N)\Big] \leq \mathbb{E}\Big[(Y_N^N - a)^+\Big] = \mathbb{E}\Big[(X_0-a)^+\Big] \leq |a| + \mathbb{E}(|X_0|).$$

En déduire que le nombre total de traversées montantes par (X'_n) de $[a,b]$, donné par

$$U([a,b],X') = \sup\{\ell \in \mathbb{N} : \exists m_1 < n_1 < \ldots < m_\ell < n_\ell \leq 0 : \\ X'_{m_1} \leq a, X'_{n_1} \geq b, \ldots, X'_{m_\ell} \leq a, X'_{n_\ell} \geq b\},$$

satisfait

$$(b-a)\mathbb{E}\Big[U([a,b],X')\Big] \leq |a| + \mathbb{E}(|X_0|), \quad \text{pour tous les rationnels } a<b, \text{ p.s.}$$

(c) En déduire que la martingale rétrograde (X_n) converge presque sûrement vers une variable X_∞ et que $X_\infty \in \mathrm{L}^1$.

(d) Montrer que la suite (X'_n) est uniformément intégrable et déduire que la martingale rétrograde $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^1.

(e) On note $\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Montrer que $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$ et que $X_\infty = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_\infty)$ p.s.

2. On continue de supposer que $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de sous-tribus et soit Y une variable aléatoire intégrable. On note encore $\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n) \to \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty) \quad \text{p.s. et dans } \mathrm{L}^1.$$

On pourra utiliser la première partie de l'exercice.

3. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. intégrables et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. On introduit $\mathcal{F}^n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$.

(a) Montrer que $(\mathcal{F}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante de sous-tribus.

(b) Montrer que $\mathcal{F}^n = \sigma(S_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$.

(c) Montrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathbb{E}(\xi_k|\mathcal{F}^n) = \mathbb{E}(\xi_1|\mathcal{F}^n)$. En déduire que

$$\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(\xi_1|S_n) = \mathbb{E}(\xi_1|\sigma(S_n,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\ldots) = \mathbb{E}(\xi_1|\mathcal{F}^n).$$

(d) Utiliser le point précédent pour montrer que la suite $({S_n}/{n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.

(e) En utilisant la loi de tout ou rien de Kolmogorov déduisez que la limite est une constante p.s. et la calculer. Quel résultat vient d'être démontré ?

4. Soit $(\eta_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles (sans aucune hypothèse supplémentaire). On note $\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)$ et on définit la tribu asymptotique $\mathcal{T} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

(a) Montrer que pour tout événement $A \in \mathcal{F}$ (la tribu de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) on a

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) \to \mathbb{P}(A|\mathcal{T}) \quad \text{p.s. et dans } \mathrm{L}^1.$$

(b) On suppose que la tribu $\mathcal{T}$ est presque sûrement triviale, c'est-à-dire que si $G \in \mathcal{T}$ alors $\mathbb{P}(G) = 0$ ou 1. Montrer que dans ce cas

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) \to \mathbb{P}(A) \quad \text{p.s. et dans } \mathrm{L}^1.$$

En déduire que pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{B\in\mathcal{F}_n} |\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = 0$.

(c) Réciproquement, montrer que si on a cette "indépendance asymptotique",

$$\forall A \in \mathcal{F}, \lim_{n\to\infty} \sup_{B\in\mathcal{F}_n} |\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = 0,$$

alors la tribu $\mathcal{T}$ est presque sûrement triviale.