Devoir en temps libre

pour le 17 novembre 2015 - 8 pages maximum

Chemins étiquetés

On considère deux chemins distincts γ et δ reliant les mêmes points de départ et d'arrivée empruntés par des passants successifs. Nous allons étiqueter, pour $n \geq 1$ entier, le chemin emprunté lors du n-ième passage par une variable aléatoire Y_n ayant ses valeurs dans $\{\gamma, \delta\}$. Nous allons aussi étiqueter par deux autres variables aléatoires G_n et D_n l'attractivité des chemins γ et δ au moment du $(n+1)$-ième passage.

On se donne une fonction $r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $r(x) \geq x$ pour tout $x > 0$, une suite (U_n) de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, ainsi que (Y_0, G_0, D_0). La suite (Y_n, G_n, D_n) est définie par la relation de récurrence :

$$(Y_{n+1}, G_{n+1}, D_{n+1}) := \begin{cases} (\gamma, r(G_n), D_n), & \text{si } U_{n+1} \leq \frac{G_n}{G_n+D_n} \\ \\ (\delta, G_n, r(D_n)), & \text{si } U_{n+1} > \frac{G_n}{G_n+D_n}. \end{cases}$$

Supposons que $G_0 = D_0 = 1$ et nous allons nous intéresser au nombre de passages par le chemin γ et par le chemin δ à l'instant n donnés par

$$S_0(\gamma) = 0, \quad S_n(\gamma) := \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_\ell = \gamma\}} \qquad \text{et} \qquad S_0(\delta) = 0, \quad S_n(\delta) := \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_\ell = \delta\}}.$$

Le but de l'exercice est d'établir trois résultats asymptotiques quand $n \to \infty$.

A. Absence d'étiquette : on suppose dans cette partie que $r(x) = x$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que $(S_n(\gamma))_{n\geq 0}$ et $(S_n(\delta))_{n\geq 0}$ sont des marches aléatoires sur $\mathbb{N}$ et décrire leur incréments.
2. Les suites $(S_n(\gamma)/n)$ et $(S_n(\delta)/n)$ sont-elles convergentes ? Si oui préciser le type de la convergence et trouver leurs limites.
3. On note $\Delta_n = S_n(\gamma) - S_n(\delta)$. Montrer que $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et décrire ses incréments.
4. Montrer que $\liminf_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ p.s. *Cette question sera admise si le cours ne sera pas assez avancé sur les chaînes de Markov.*

B. Étiquetage linéaire : on suppose dans cette partie que $r(x) = 1 + x$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$ entier, $G_n = 1 + S_n(\gamma)$ et $D_n = 1 + S_n(\delta)$.
2. Soit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \{U_1, \ldots, U_n\}$, pour $n \geq 1$. On note $M_n := (1 + S_n(\gamma))/(n+2)$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que la suite (M_n) converge presque sûrement vers une variable M_∞ à valeurs dans $[0,1]$.
4. Montrer par récurrence sur n que la variable aléatoire M_n est de loi uniforme sur l'ensemble $\{1/(n+2), \ldots, (n+1)/(n+2)\}$. En déduire que M_∞ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

C. Étiquetage géométrique : on suppose cette fois que $r(x) = \rho x$ pour tout $x > 0$, où $\rho > 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $G_n = \rho^{S_n(\gamma)}$ et $D_n = \rho^{S_n(\delta)}$.
2. On reprend le notations pour la suite $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ et pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Calculer
$$\mathbb{P}(|\Delta_{n+1}| = |\Delta_n| - 1 \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{et } \mathbb{P}(|\Delta_{n+1}| = |\Delta_n| + 1 \mid \mathcal{F}_n)$$
3. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$$\psi(1) \geq \psi(0) \quad \text{et} \quad \psi(n+1) - \psi(n) = \rho^{-n}(\psi(n) - \psi(n-1)), \;\; \forall n \geq 1.$$
Montrer que $(\psi(|\Delta_n|))_{n\geq 0}$ est une sousmartingale.
4. On pose $\phi(0)$ et $\phi(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \rho^{-\frac{\ell(\ell+1)}{2}}$, pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(\phi(|\Delta_n|))_{n\geq 0}$ est une sousmartingale qui converge presque sûrement.
5. Montrer que presque sûrement $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = +\infty$.
6. Montrer que pour tous $N, k \geq 0$ entiers la probabilité pour que la suite $|\Delta_n|$ soit croissante à partir du rang N sachant que $|\Delta_N| = k$
$$\mathbb{P}\big(\forall n \geq N : |\Delta_{n+1}| = |\Delta_n| + 1 \mid |\Delta_N| = k\big)$$
ne dépend pas de N et tend vers 1 lorsque $k \to \infty$. En déduire que presque sûrement la suite $(|\Delta_n|)_{n\geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang.
7. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est absorbée par γ ou δ. En déduire que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une loi symétrique.

Stratégie optimale

Un propriétaire veut vendre sa maison au meilleur prix avant une échéance N. Chaque jour $n \in \{0, \ldots, N\}$ il reçoit une offre X_n : il peut accepter cette offre ou attendre la suivante sachant qu'il ne pourra plus bénéficier des offres passées. Le propriétaire veut donc connaître le meilleur moment pour vendre sur la base des offres passées sans connaître le futur. On considère un filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ telle que $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est adapté à cette filtration. On suppose que $X_n \in \mathrm{L}^1$, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$. L'objectif du propriétaire est de construire un temps d'arrêt τ de telle sorte que $\mathbb{E}(X_\tau)$ soit maximale. Notons $\mathcal{T}_N$ l'ensemble de tous les temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$. On cherche à résoudre le problème d'arrêt optimal : trouver V^N et $\tau^\star$ tels que
$$V^N = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_N} \mathbb{E}(X_\tau) \quad \text{et} \quad V^N = \mathbb{E}(X_{\tau^\star}).$$
Si le problème d'arrêt optimal se pose au temps N le seul choix possible est $\tau = N$ et l'offre est X_N. Au moment $N-1$ la stratégie serait de comparer l'offre X_{N-1} en s'arrêtant au moment $N-1$ avec l'offre espérée si on continuait $\mathbb{E}(X_N \mid \mathcal{F}_{N-1})$. On peut raisonner de la même façon de manière rétrograde date par date.

A. Enveloppe de Snell : On construit un processus $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ par récurrence
$$Y_N = X_N \quad \text{et} \quad Y_n = \max\{X_n, \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\}, \; n \in \{N-1, \ldots, 0\}.$$

1. Montrer que $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ est une surmartingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$.
2. Montrer que (Y_n) est la plus petite surmartingale majorant le processus (X_n).

3. On pose
$$\tau^\star = \inf\big\{n \in \{0,\dots,N\} \,:\, Y_n = X_n\big\}.$$
Montrer que $\tau^\star$ est un temps d'arrêt de $\mathcal{T}_N$ et que $(Y_n^{\tau^\star} = Y_{\tau^\star\wedge n})_{0\le n\le N}$ est une martingale.
4. Vérifier que
$$\mathbb{E}(Y_0) = \mathbb{E}(X_{\tau^\star}) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_N} \mathbb{E}(X_\tau).$$

B. Se garer pour aller au théâtre : On souhaite aller au théâtre et se garer dans la rue (qui est en sens unique) au plus près de la salle, mais, bien sûr, peu de places sont libres. Ainsi, si on décide de se garer, à quelle distance du théâtre doit-on décider de prendre la place ? On suppose qu'on part de l'origine et le cinéma se trouve à l'entier $N > 0$. Les places de parking sont placées à tous les entiers et on se donne une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\ge 0}$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$: la variable $\xi_n = 1$ si et seulement si la place n est occupée. Lorsque la place n est libre et on décide de se garer on doit marcher une distance de $|N-n|$ (coût) ; quand on est au niveau de la place n on ne peut pas voir si la place située en $n+1$ est libre (et ni plus loin) et si on décide d'avancer on ne put plus retourner aux emplacements précédents. Enfin, si on arrive en N sans pouvoir se garer on va prendre la première place de stationnement libre qui se présente. Ainsi si la place N est occupée le coût est
$$-X_N = \sum_{j\ge 1} j p^{j-1}(1-p) = \frac{1}{1-p}\ .$$
Avant d'arriver en N le processus de coût est donné par
$$-X_n = (N-n)\mathbb{1}_{\{\xi_n=0\}} + \infty\mathbb{1}_{\{\xi_n=1\}}$$
(si $\xi_n = 1$ on ne peut occuper la place n à aucun coût fini). Le but est trouver un temps d'arrêt qui minimise le coût ou, équivalent trouver $\tau^\star$ qui réalise
$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_N} \mathbb{E}(X_\tau).$$

1. Utiliser une récurrence rétrograde et l'indépendance des ξ_n pour montrer que l'enveloppe de Snell Y_n est une fonction de ξ_n et donc
$$\mathbb{E}(Y_{n+1}\mid\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}) = f(N-(n+1)), \quad \text{avec } f : \{0,\dots,N\} \to \mathbb{R} \ \text{ à trouver.}$$
2. Montrer que $n \to f(N-n)$ est décroissante et que trouver le premier n tel que $Y_n = X_n$ revient à trouver le premier $n < N$ tel que
$$\xi_n = 0 \quad \text{et} \quad -(N-n) \ge f(N-n).$$
Ainsi si $r^\star$ est le premier point tel que $-(N-r^\star) = f(N-r^\star)$ alors la place choisie est la première disponible après $r^\star$. On pourra faire le graphe des fonctions sur $[0,N]$ $x \to -(N-x)$ et $x \to f(N-x)$.
3. On remarque donc que la stratégie optimale est donnée par $\tau^\star = \inf\{n \ge N - r^\star : \xi_n = 0\}$, où $r^\star$ est à déterminer. Notons $\tau(r) = \inf\{n \ge N-r : \xi_n = 0\}$ et $C(r) = \mathbb{E}(Y_{\tau(r)})$. Montrer que
$$C(0) = \frac{p}{1-p} \quad \text{et} \quad C(r) = -(1-p)r + pC(r-1).$$
Déterminer $C(r)$ pour tout $r \le N$.
4. Montrer que pour maximiser $C(r)$ on doit prendre $r^\star = \inf\{r \ge 0 : p^{r+1} \le \frac{1}{2}\}$. Que vaut $r^\star$ pour $p = 0.5$ ou pour $p = 0.9$ et quelle sera la stratégie correspondante ?