Devoir en temps libre

pour le 16 novembre 2015

Sur les arbres de Galton-Watson (ou le processus de branchement)

Soit $P = \sum_{j\geq 0} p_j \delta_j$ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ et $(Z_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi P. On définit par récurrence une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ telle que $Z_0 := 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := Z_{n+1,1} + \ldots + Z_{n+1,Z_n}.$$

La suite Z_n représente le nombre d'individus à la génération n d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction P. On adopte ici la convention $\sum_{\varnothing} = 0$ de sorte que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$. On désigne par $T := \inf\{n \geq 0,\, Z_n = 0\} \in \overline{\mathbb{N}}$ le temps d'extinction de l'arbre.

1. Établir les points suivants :
   (a) Si $p_k = 1$ pour un $k \in \mathbb{N}$, i.e. $P = \delta_k$, alors $Z_{n+1} = kZ_n = \cdots = k^{n+1} Z_0$.
   (b) Si $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$ alors $\mathbb{P}(Z_n \uparrow \infty) = 1$. Autrement dit, la taille de l'arbre tend vers l'infini avec n (comparer au jeu de pile ou face).
   (c) Si $p_0 + p_1 = 1$ et $p_0 \neq 0$, alors $\mathbb{P}(Z_n \downarrow 0) = 1$. Autrement dit, l'arbre s'éteint presque sûrement et la loi du temps d'extinction T est géométrique.

   Dans toute la suite, nous supposerons que :

   $$Z_0 = 1, \quad 0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1, \quad p_k < 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

   On note $m := \mathbb{E}[Z_1]$ lorsque cette moyenne existe, et $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
2. Lorsque $m < \infty$ et $\sigma^2 < +\infty$ calculer $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n+1}^2|Z_n)$. En déduire que pour tout $n \geq 0$

   $$\mathbb{E}(Z_n) = m^n \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(Z_n) = \begin{cases} m^n \sigma^2 \frac{m^n - 1}{m^2 - m}, & \text{si } m \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

   Le cas $m = 1$ est dit critique, les cas $m < 1$ et $m > 1$ sont respectivement dits sous-critique et sur-critique.
3. Montrer que la probabilité d'extinction q vérifie $q = \mathbb{P}(T < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$.
4. Soit G la fonction génératrice de $Z_{1,1} = Z_1$, i.e. $G(s) = \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \sum_{j\geq 0} p_j s^j$, et soit G_n la fonction génératrice de Z_n, i.e. $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que l'on a la relation

   $$G_n = \underbrace{G \circ G \circ \ldots \circ G}_{n \text{ fois}}.$$

5. Remarquer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$ et en déduire d'une part que, si $m \leq 1$ alors l'extinction est presque sûre i.e. $q = \mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, et d'autre part que si $m > 1$ alors $q = \mathbb{P}(T < +\infty)$ est l'unique racine dans $]0, 1[$ de l'équation de point fixe $G(s) = s$. Expliciter cette probabilité lorsque la loi de reproduction est une loi géométrique $\mathcal{G}(\alpha)$ ($\alpha \in]0, 1[$).

6. Pour $n \geq 0$ on note $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n)$. On suppose $q < 1$.
   (a) Montrer que la suite $M_n = q^{Z_n}$ est une martingale positive. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty$ existe et préciser dans quel sens.
   (b) Montrer que $q = \mathbb{E}(q^{Z_T}) = \mathbb{E}\big(q^{Z_\infty}\mathbb{1}_{T=\infty}\big) + q$. En déduire que sur $\{T = \infty\}$, $Z_\infty = \infty$, autrement dit s'il n'y a pas extinction alors il y a explosion (dichotomie).
7. Montrer que la suite $W_n := {}^{Z_n}/_{m^n}$ est une martingale qui converge dans un sens à préciser vers une v.a. W.
   (a) Montrer que $E(W) \leq 1$ et que sur l'événement $\{$extiction$\}$ on a $W = 0$.
   (b) Supposer que $q = 1$. Que peut-on dire sur W ? La martingale $(W_n)_{n\geq 0}$ est-elle régulière ?

   On cherche maintenant à préciser le comportement asymptotique de Z_n dans les cas critique et sur-critique.
8. On suppose tout d'abord que $m = 1$ et $\sigma < +\infty$.
   (a) En faisant un développement de Taylor de la fonction G à l'ordre 2 en 1, montrer que
   $$\frac{1}{1-G(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{\sigma^2}{2} + \beta(s), \qquad \text{avec } \beta \text{ bornée sur } [0,1] \text{ et } \lim_{s\to 1}\beta(s) = 0.$$
   (b) En déduire que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1-G_n(s)} - \frac{1}{1-s}\Big) = \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{uniformément pour tout } s \in [0,1].$$
   En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = {}^2/_{\sigma^2}$ et que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[{}^{Z_n}/_n | Z_n > 0] = \sigma^2/2$;
   (c) $\mathcal{L}({}^{Z_n}/_n | Z_n > 0)$ tend lorsque n tend vers l'infini vers la loi exponentielle $\mathcal{E}({}^2/_{\sigma^2})$. On pourra calculer
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda Z_n/n} | Z_n > 0\Big).$$
9. On suppose maintenant que $m > 1$ et $\sigma < +\infty$. Montrer que la martingale (W_n) converge dans $\mathbb{L}^2$ vers la variable W qui vérifie
   (a) $\mathbb{E}[W] = 1$ et $\mathrm{Var}(W) = {}^{\sigma^2}/_{(m^2-m)}$;
   (b) $L'(0) = -1$, et $L(m\lambda) = G(L(\lambda))$, où on a posé $L(\lambda) := \mathbb{E}[e^{-\lambda W}]$.
10. (théorème de Yaglom - admis) Dans le cas sous-critique la loi $\mathcal{L}(Z_n | Z_n > 0)$ converge, quand $n \to \infty$, vers une loi sur $\mathbb{N}^*$ dont la fonction génératrice H satisfait $(H-1)\circ G = m(H-1)$