Devoir maison du 4 mai 2020

Durée 4 heures. La rédaction est à rendre le 4 mai 2020 entre 18h et 18h15.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction dans l'appréciation. Bon travail !

Exercice 1 *La croissance des boules*
Soient deux réels $0 < r < R$ et soit a un élément d'un espace vectoriel non-nul E de norme $\|\cdot\|$.

i) Montrer que $B(a,r) \subset \overline{B}(a,R)$ et que pour chaque $\rho \in [r,R]$, on a $S(a,\rho) \subset \overline{B}(a,R) \backslash B(a,r)$.

ii) Soit b un autre élément de l'espace E et on note $d(\cdot,\cdot)$ la distance induite par $\|\cdot\|$ sur E. Montrer que si $r + d(a,b) \leq R$ alors $B(a,r) \subset B(b,R)$ et $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R)$.

Exercice 2 *Une application lipschitzienne*
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Vérifier que $N\big((x,y)\big) := \|x\| + \|y\|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $E \times E$ et ensuite montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x-y\|$ est une application réelle 1-lipschitzienne sur $E \times E$ muni de la norme N.

Exercice 3 *Continuité de deux applications linéaires*
Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Vérifier que les applications suivantes sont bien à valeurs dans ℓ^∞, qu'elles sont linéaires et continues :

i) $\Delta : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par $\Delta(u) = v$ où $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$;

ii) $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par $T(u) = w$ où $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n u_i$.

Peut-on réaliser le cas d'égalité dans les inégalités donnant leur continuité ?

Exercice 4 *Suite et série de fonctions*
Les deux questions suivantes sont indépendantes.

i) Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t(1+nt)} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).

ii) Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2} - \frac{(n+1)t}{1+(n+1)^2t^2}$.

Étudier la série de fonctions $\sum g_n$ (convergence simple, normale, uniforme). Calculer sa somme quand elle converge, si possible.

Exercice 5 *Séries entières*
Les questions suivantes sont indépendantes.

i) Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n+n} z^n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2 n}{n} z^n$.

ii) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière suivante $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n} t^{4n-1}$.

Exercice 6 *Fonctions développables en série entière*
Former le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes $g : t \mapsto \begin{cases} \left(\sin t/t\right)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
(on pourra penser à utiliser une identité trigonométrique concernant le double de l'argument) et $h : t \mapsto \int_0^t \cos(s^2)ds$ (penser aux opérations avec les séries entières).

Tournez S.V.P. pour les exercices bonus - facultatives

Exercice Bonus pour L2 CMR *Dérivées partielles et différentielle*
Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, existence et la continuité des dérivées partielles premières de f avec $f(x,y) = \begin{cases} e^{1/(x^2+y^2-1)} & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$. Donner l'expression de la différentielle.

Exercice Bonus pour L3 SSF *Séries trigonométriques*
Former le développement en série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, paire donnée par $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ si $t \in [0, \pi]$. Étudier sa convergence et déduire les sommes des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.