Probabilités de base : devoir maison no. 2

- une copie double maximum, à rendre pour le **4 décembre 2007** -

Exercice I. (d'après l'exercice **3.12**)

Soit $(X_n : n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

(i) Soit

$$T_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{n^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1.$$

Montrer que T_n est une variable aléatoire gaussienne et calculer son espérance et sa variance.

(ii) Dans l'exercice **1.20** on a noté la fonction de Laplace $\Phi(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ et on a trouvé l'équivalent, lorsque $x \to \infty$,

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Utiliser ce résultat pour majorer $\mathbb{P}(|T_n| > \varepsilon)$.

(iii) En déduire que, lorsque $n \to \infty$, $T_n \to 0$ p.s.

Exercice II. (d'après l'exercice **3.22**)

Soit $(X_n : n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$.

(i) Montrer que la fonction caractéristique de Y_n peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} \cos(\frac{t}{4}) \cos(\frac{t}{8}) \cos(\frac{t}{16}) \ldots \cos(\frac{t}{2^{n+1}}) = e^{\frac{it}{2}} e^{-\frac{it}{2^{n+1}}} (\frac{1}{2})^n \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2^{n+1}})}.$$

(ii) En déduire que Y_n converge en loi vers U.

(iii) Si on suppose maintenant que les variables aléatoires X'_n sont indépendantes de même loi uniforme sur $\{0, \ldots, 9\}$ et si on note $Y'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X'_k}{10^k}$, que pensez-vous trouver comme limite en loi pour la suite (Y'_n) ? Justifiez votre réponse.